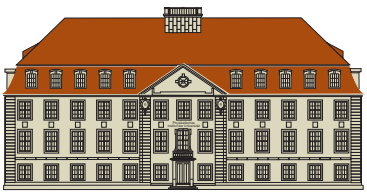
Physikalisches Institut der Universität Bonn

Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler (Chemie, Erdwissenschaften, Geodäsie und Informatik)

Modul physik013

Status August 2015



universitätbonn

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen iii

N00 Einführungsversuch 1

N02 Freie und erzwungene Schwingungen mit Dämpfung 5

N06 Trägheitsmoment und Physisches Pendel 11

N14 Statistik 17

N32 Gleichströme, Spannungsquellen und Widerstände 31

N34 Wechselstromwiderstände, RC-Glieder und Schwingungen 39

N42 Elektrische und magnetische Krafteinwirkung auf geladene Teilchen 49

N62 Linsen und Linsensysteme 55

N66 Prismen-Spektralapparat 67

N70 Polarisation von Licht 71

A0 Beschreibung periodischer Vorgänge 77

A1 Kurzeinführung in die Statistik 85

A2 Schwingungen 97

A3 Oszillograph und Datenaufnahme mit dem PC 107

A4 Darstellung von Wechselströmen und -spannungen im Zeigerdiagramm 113

A5 Optische Instrumente 123

Raumplan 133

Vorbemerkungen

Die vorliegenden Praktikumsanleitungen zu den verschiedenen Versuchen sollen zwei Zielen dienen:

Erstens sollen sie in die Aufgabenstellungen des jeweiligen Versuchs einweisen und bei der Vorbereitung unterstützen. Allerdings sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass damit keine ausreichende Behandlung der zum Verständnis der Versuche notwendigen physikalischen Grundlagen gegeben wird. Daher werden jeweils entsprechende Lehrbücher angegeben, deren abschnittsweise Lektüre für die erfolgreiche Bewältigung des Praktikums notwendig ist. Die zitierten Bücher stehen in der „Abteilungsbibliothek für Medizin, Naturwissenschaften und Landbau“ (Nußallee 15a) zur Verfügung.

Zweitens werden die Versuchsanordnungen erklärt, Anweisungen für die Versuchsdurchführungen gegeben, sowie die zu lösenden Aufgaben gestellt. Die Anleitungen sind speziell auf die in Bonn vorhandenen Versuchsaufbauten zugeschnitten und für die Versuchsdurchführung und Auswertung verbindlich. Die Aufgaben sind unterteilt in solche, die **vor Beginn** des Versuchs zu lösen sind (gekennzeichnet durch **große Buchstaben**), und solche, die **im Verlauf** der Versuchsdurchführung zu lösen sind (gekennzeichnet durch **kleine Buchstaben**). Die sorgfältige Bearbeitung der ersteren dient der Vorbereitung und ist eine der Voraussetzungen zum Verständnis des Versuchsablaufs. Sie sind vor Versuchsbeginn schriftlich zu lösen und der/dem Versuchsassistentin/en zur Kontrolle vorzulegen.

Zu Beginn jedes Praktikumsversuchs gibt es eine Besprechung vor Ort, bei welcher die Details des Versuchsaufbaus und der Versuchsdurchführung besprochen werden. Im Rahmen dessen werden die benötigten Grundkenntnisse, der rote Faden der Versuchsdurchführung und die Versuchsziele abgefragt. Sollte sich dabei herausstellen, dass ein(e) Praktikant(in) unzureichend vorbereitet ist, wird er/sie an diesem Tag nicht zur Durchführung des Versuchs zugelassen; ihm/ihr wird ein Nachholtermin zugewiesen. Bei zweimaliger Nichtzulassung gilt das Praktikum als nicht bestanden.

In der Regel arbeiten zwei Praktikant(inn)en zusammen an einer Apparatur, wobei jede(r) ein eigenes Protokoll anfertigt. Daher sind die Messwerte in beiden Protokollen identisch. Bei der Auswertung und der Fehlerdiskussion dürfen jedoch Unterschiede auftreten. Das Protokoll soll parallel zum Experimentieren in einem festen DIN A4 Heft geschrieben werden und damit den Ablauf und die Auswertung der Versuche nachvollziehbar protokollieren (sog. „Ablaufprotokoll“). Es ist leserlich und für Dritte logisch nachvollziehbar abzufassen. Verworfene Messungen werden durchgestrichen und evtl. mit einer Bemerkung versehen, aus welcher der Grund der Streichung hervorgeht.

Folgende Punkte muss das Protokoll mindestens enthalten:

1. Datum, Versuchsnummer und Versuchstitel
2. Thema und Aufgabenstellung mit einer kurzen Zusammenstellung der verwendeten Größen, Formeln und Beziehungen
3. Antworten zu den Aufgaben, die vor Versuchsbeginn zu lösen sind
4. Versuchsskizze mit Angaben über Geräte (z. B. Gerätenummer)
5. Beobachtungen
   - Alle unmittelbar beobachteten Messwerte. Diese sind nur sinnvoll, wenn sie die verwendete physikalische Dimension enthalten (z. B. 5,4 **V** oder 17 **Skt**);
   - Sonstige Beobachtungen (z. B. Auffälligkeiten während der Durchführung)
6. Auftragung der direkten oder abgeleiteten Messwerte auf Millimeterpapier bzw. ausgedruckte Plots
7. Auswertung mit Nebenrechnungen (Bei den Rechnungen sind nur so viele Dezimalstellen zu verwenden, dass Rundungsfehler keinen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis haben.)
8. Ergebnisse mit Fehlerangabe (Wo ein Vergleich mit Literaturwerten möglich ist, müssen die Übereinstimmungen bzw. Abweichungen kurz diskutiert werden.)
9. Antworten zu den Aufgaben während und nach der Versuchsdurchführung.

Das Protokoll ist am Versuchstag fertigzustellen und der/dem Versuchsassistenten/in abzugeben. Falls dies aus Zeitmangel nicht möglich sein sollte, kann mit der/dem Assistentin/en ein anderer Abgabetermin vereinbart werden. Das Protokoll muss jedoch spätestens vor Beginn des nächsten Praktikumsversuchs vorliegen. Die für die unterschiedlichen Praktika verbindlichen Abgabemodalitäten werden in der Vorbesprechung bekannt gegeben.

Zur Auswertung (aber nicht zur Protokollierung) der Messdaten können auch Computer verwendet werden. Die Resultate, einschließlich Tabellen und Graphen, sind auszudrucken und in das Protokollheft einzukleben.

Die Praktikumsassistent(inn)en stehen während der gesamten Praktikumszeit zur Verfügung, verlassen jedoch nach der Einführung in der Regel den Praktikumsraum. Sie hinterlassen dann eine Telefonnummer, unter der sie bei auftretenden Schwierigkeiten erreicht werden können.

Das Praktikum wird durch eine zweistündige Klausur abgeschlossen, welche gemäß den Regeln der jeweiligen Fächer wiederholt werden darf. Die Termine für die Klausur und Klausureinsicht werden auf der Praktikumswebseite bekannt gegeben. Als Hilfsmittel sind ausschließlich dokumentenechte Stifte, Lineal und Geodreieck erlaubt.

Allgemeine Literaturempfehlungen

Praktikumslehrbücher:

- Walcher, Praktikum der Physik; Teubner
- Geschke, Physikalisches Praktikum für Anfänger, Teubner
- Westphal, Physikalisches Praktikum; Vieweg
- Kohlrausch, Praktische Physik zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik

Messdatenauswertung:

- Blobel/Lohrmann, Statistische und Numerische Methoden der Datenanalyse
- Gränicher, Messung beendet - was nun?, ETH-Zürich/Teubner
- Brandt, Datenanalyse

Formelsammlungen:

- Kneubühl, Repetitorium der Physik;
- Otten, Repetitorium der Experimentalphysik
- Kuchling, Taschenbuch der Physik

Es wird nachdrücklich empfohlen, die Anhänge der Praktikumsanleitung vor Beginn des Praktikums durchzuarbeiten.

Versuch N00

Einführungsversuch

Lernziel: Am Beispiel eines einfachen Messproblems sollen Fertigkeiten für eine erfolgreiche Versuchsdurchführung und für das Verfassen eines Versuchsprotokolls erworben werden. Die Teilnahme ist verpflichtend und wird testiert; eine Bewertung des Versuchs findet nicht statt.

Kenntnisse: Fehlerrechnung, Grundbegriffe und Gesetze der geometrischen Optik: Brechungsgesetz, Linsengleichung, Abbildungsmaßstab

Literatur: Einführungsabschnitte in Praktikumsbüchern

Geräte: Optische Bank mit Maßstab und mehreren Reitern, Sammellinse, Lampe, Kreuzblende, Projektionsschirm

N00.1 Erläuterungen

Bestimmen Sie die Brennweite einer dünnen Sammellinse nach dem Bessel-Verfahren. Dazu muss eine Messapparatur aufgebaut und justiert werden. Für die Bestimmung des Mittelwertes und der statistischen Fehler wird die Messung mehrfach wiederholt. Fehlerquellen sollen diskutiert und mittels Fehlerrechung quantifiziert werden.

Zunächst sei an die Abbildungsgleichung und die Definition des Abbildungsmaßstabs erinnert. Gegenstandsweite g, Gegenstandsgröße G, Bildweite b, Bildgröße B, Brennweite f und Abbildungsmaßstab γ sind verknüpft in den beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{N00.1}$$

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \gamma. \tag{N00.2}$$

Im Folgenden wird beiderseits der Linse das gleiche Medium (Luft) vorausgesetzt.

Aufgabe N00.A: *Beweisen Sie, dass es für $a > 4f$ genau 2 Linsenstellungen mit scharfer Abbildung gibt. Welchen Abbildungsmaßstab hat man bei $a = 4f$?*

Aufgabe N00.B: *Leiten Sie mit dem Abstand der Linsenpositionen e (siehe Abb. N00.1) die folgende Gleichung her:*

$$4f = a - e^2/a. \tag{N00.3}$$

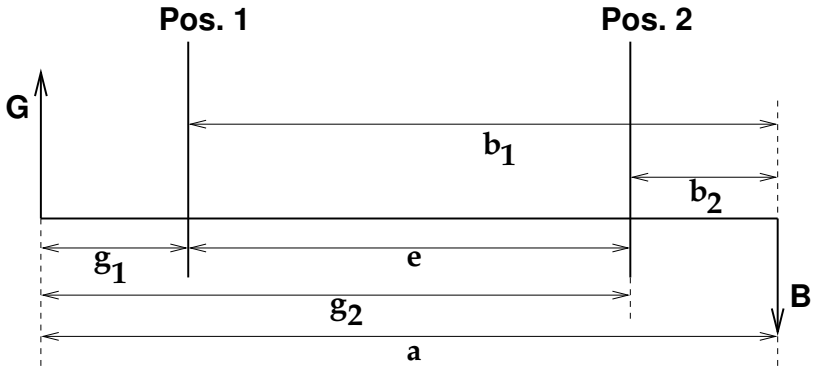


Abbildung N00.1: Aufbau für das BESSEL-Verfahren auf einer Optischen Bank

N00.2 Versuchsdurchführung

In Ihr Protokollheft haben Sie vor Versuchsbeginn bereits eingetragen:

- *Nummer und Titel des Versuchs, Datum des Versuchstags,*
- *Ihre Antworten zu den Aufgaben N00.A und N00.B.*

Aufgabe N00.a: *Bauen Sie Gegenstand, Linse und Schirm auf der optischen Bank so auf, dass $a > 4f$ gewährleistet ist.*

Der Abstand a ist durch die Banklänge beschränkt. Den von Ihnen eingestellten Wert von a messen Sie mit dem in die optische Bank integrierten Maßstab. Dazu müssen Sie entscheiden, welche Stellen an Gegenstand und Schirm Sie für die Abstandsmessung heranziehen, so dass Sie sich keinen systematischen Längenmessfehler einhandeln und a auf $\Delta a \approx 1$ mm messen können.

Um die Bedingung $a > 4f$ einhalten zu können, müssen Sie f ungefähr kennen. Bestimmen Sie in einem einfachen Vorversuch – ohne optische Bank – die ungefähre Größe der Brennweite f.

Durch Verschieben der Linse zwischen Gegenstand und Schirm auf der optischen Bank können Sie überprüfen, ob Ihr Aufbau diese Bedingung erfüllt, und ebenso, ob Sie Gegenstand, Linse und Schirm auf ein- und derselben optischen Achse parallel zur optischen Bank zentriert haben. *Wie können Sie das erkennen?* Prüfen Sie dabei auch, ob Sie die Ebenen von Blende, Linse und Schirm senkrecht zur optischen Achse fixiert haben.

Spätestens jetzt sollten Sie eine Skizze des Aufbaus mit den Bezeichnungen – ähnlich wie Abb. N00.1 – in Ihr Heft einzeichnen. Dann tragen Sie direkt, d.h. ohne Schmierzettel, die Ergebnisse Ihrer groben Bestimmung der Brennweite f und Ihre Messung(en) des Abstands a ein. Zur Ermittlung von $a \pm \Delta a$ ist eine Messreihe nicht sinnvoll *(Warum?)*. Schätzen Sie Δa sinnvoll ab.

Aufgabe N00.b: *Mit Hilfe des* BESSEL*-Verfahrens bestimmen Sie nun die Brennweite der Sammellinse. Für festes a sind 10 Paare von Linsen-Einstellungen und Abstandsmessungen vorzunehmen. Aus diesen Messreihen-Paaren ist f mit dem zugehörigen Messfehler Δf zu bestimmen.*

Entscheiden Sie, wie Sie den Abstand e messen: für jede der beiden Linsenpositionen i messen Sie den Abstand x_i des optischen Reiters von demselben Fixpunkt; benutzen Sie immer dieselbe Stelle. Sie erhalten 2 Messreihen x_1 und x_2.

Frage: Warum brauchen Sie die Positionen der Hauptebenen der Linse relativ zu Linsenhalter bzw. Reiter nicht zu kennen?

Im Protokollheft haben Sie eine Tabelle mit geeigneter Spaltenzahl für Ihre Messreihen und deren Auswertung vorbereitet. Es ist sinnvoll, eine Spalte für Bemerkungen zu einzelnen Messungen einzurichten, z.B. für Ihre Erklärung einer Fehlmessung.

Nun beginnen Sie die Auswertung Ihrer Messungen. Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle x_1 \rangle$ und $\langle x_2 \rangle$ und daraus $\langle e \rangle$. Mit Hilfe von Gleichung N00.3 erhalten Sie aus a und $\langle e \rangle$ den Zentralwert $\langle f \rangle$ Ihrer Messung von f. Das ist Ihr bester „Schätzwert“ für die wahre Brennweite.

Ermitteln Sie die Fehler Δx_1, Δx_2 Ihrer Messreihen. Dazu berechnen Sie die Streuungen $\Delta x_{i,n}$ der N (hier ist $N = 10$) einzelnen „Stichproben“ gemäß $\Delta x_{i,n} = x_{i,n} - \langle x_i \rangle$ und daraus die beiden Mittelwertfehler bei Mehrfachmessung:

$$\Delta x_i = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N} \Delta x_{i,n}^2}. \tag{N00.4}$$

Dann berechnen Sie den Messfehler Δe und daraus schließlich Δf, jeweils nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz. Für Δe ist das einfach: $(\Delta e)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$. Dann formen Sie Gleichung N00.3 so um, dass Sie f als Funktion von e und a erhalten, und berechnen die Ableitungen $\partial f/\partial e$ und $\partial f/\partial a$. Damit berechnen Sie dann $\Delta f_{\text{a=const}} = \partial f(e)/\partial e \cdot \Delta e$ und $\Delta f_{\text{e=const}} = \partial f/\partial a \cdot \Delta a$ und endlich

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta f_{\text{e=const}})^2 + (\Delta f_{\text{a=const}})^2}. \tag{N00.5}$$

All das steht jetzt in Ihrem Protokollheft.

Als Abschluss berechnen Sie mit Ihren Ergebnissen für a, Δa, e, Δe Ihr Hauptmessergebnis $f \pm \Delta f$. Bestimmen Sie die richtige physikalische Maßeinheit.

Versuch N02

Freie und erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

Lernziel: Freie und erzwungene Schwingungen mit Dämpfung gehören zu den wichtigsten Phänomenen der Physik und sind auf Gebieten verschiedenster Art zu beobachten, z.B. an Pendeln, Saiten, Maschinenteilen, sogar an der Erdkugel, an elektrischen Ladungsverteilungen in Schwingkreisen oder in Atomhüllen, an Lasern, an Molekülen, an Elementarteilchen. Besonders wichtig ist dabei das Phänomen der Resonanz. So verschieden die schwingenden physikalischen Messgrößen auch sein mögen, alle diese Schwingsysteme gehorchen denselben Gesetzmäßigkeiten. Daher ist das Verständnis der Eigenschaften irgendeines Schwingsystems die Grundlage für das Verständnis einer Vielzahl von Phänomenen, die wir in der Natur beobachten.

Dieser Versuch soll am Beispiel eines mechanischen Drehschwingsystems, dem Pohlschen Drehpendel, mit den grundlegenden Gesetzmäßigkeiten des allgemeinen Phänomens „Schwingung“ vertraut machen.

Kenntnisse: Hooksches Gesetz, Rotation eines starren Körpers, Trägheitsmoment, rücktreibendes und dämpfendes Drehmoment; freie Schwingung eines gedämpften Systems; erzwungene Schwingung, Amplituden- und Phasenverhalten, Resonanz, Inhalt von Anhang A2; Lorentz-Kraft, Induktionsgesetz, Wirbelströme.

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik, z.B.
Brandt-Dahmen, Bd. I;
Gerthsen, Physik;
Berkeley, Physik-Kurs III, Kap. 1 und 3;
Pohl, Einfg. in die Physik, Bd. I;
Westphal, Physikalisches Praktikum, Anhang;
Walcher, Physikalisches Praktikum, Kap. 2 und 7

Geräte: Pohlsches Drehpendel 346 00 von Leybold-Heraeus mit Wirbelstrombremse und Exzentererregung, Stoppuhr.

N02.1 Versuchsanordnung

Das Drehpendel nach Pohl ist ein schwingfähiges System, das eine Zusatzdämpfung besitzt. Damit lässt sich die Abhängigkeit von Amplitude und Phase eines Resonators mit gegebener Eigenfrequenz von der Frequenz eines Erregers und der Dämpfung des Resonators quantitativ aufnehmen.

Die wesentlichen Komponenten der Versuchsanordnung sind in Abb. N02.1 beschrieben. Das Schwingsystem kann durch ein periodisches, äußeres Drehmoment zu Schwingungen angeregt werden. Dieses Drehmoment wird von einem Motor (13) (mit einstellbarer Frequenz ν) über einen Exzenter (11) und ein Gestänge (12), das an einem Ende der Schnecken (2) angreift, erzeugt: dieses zusätzliche Drehmoment variiert kosinusförmig:

$$D\varphi \rightarrow D(\varphi - \varphi_1 \cos \omega t) = D\varphi - D\varphi_1 \cos \omega t. \tag{N02.1}$$

Um auch die Dämpfung des Systems variieren zu können, ist eine Wirbelstrombremse eingebaut. Der kupferne Drehkörper (1) bewegt sich im Luftspalt eines Elektromagneten (16), dessen Feldstärke (über den durch ihn fließenden Strom) wählbar ist. Die Leitungselektronen im Kupfer eines Scheibensegments erfahren beim Eintritt in das Magnetfeld eine Änderung des magnetischen Flusses, wodurch ein elektrisches Wirbelfeld im Scheibensegment induziert wird. Dies erzeugt einen geschlossenen Wirbelstrom und damit ein Magnetfeld, das nach der Lenz´schen Regel dem äußeren Feld entgegen gerichtet ist und zu einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft führt. Die Abnahme der Bewegungsenergie wird über Ohm´sche Verluste der Wirbelströme in Wärme umgesetzt.

N02.2 Durchführung des Versuchs

N02.2.1 Freie Schwingung mit Dämpfung

Mit Hilfe des Motors wird der Zeiger des Drehkörpers mit dem Nullpunkt der Skala (5) einjustiert und der Motor in dieser Stellung abgeschaltet.

Eine Schwingung wird in Gang gesetzt, indem man das Pendel von Hand auslenkt (z. B. auf 19 Skalenteile) und dann loslässt. Vermeiden Sie dabei, dem System durch ungeschicktes Loslassen einen Drehimpuls zu erteilen.

Aufgabe N02.a: *Bestimmen Sie die Eigenfrequenz ν_0 aus der Messung der Schwingungsdauer bei abgeschalteter Wirbelstrombremse über hinreichend viele Perioden. Diese Messung ist mindestens drei mal zu wiederholen.*

Aufgabe N02.b: *Messen Sie für 3 verschiedene Stärken der Dämpfung (Magnetströme I_m = (0,1 / 0,3 / 0,5) A) die abklingenden Amplituden als Funktion der Zahl n der Schwingungsperioden. Es genügen 15 Schwingungen.*
Amplitude: $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t}$ mit $t = n \cdot T$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) und $T = 2\pi/\omega$.
Da Sie zu zweit sind, kann eine/r Protokoll führen und der/die andere die aufeinanderfolgenden Amplitudenwerte eines Abklingvorgangs ablesen.

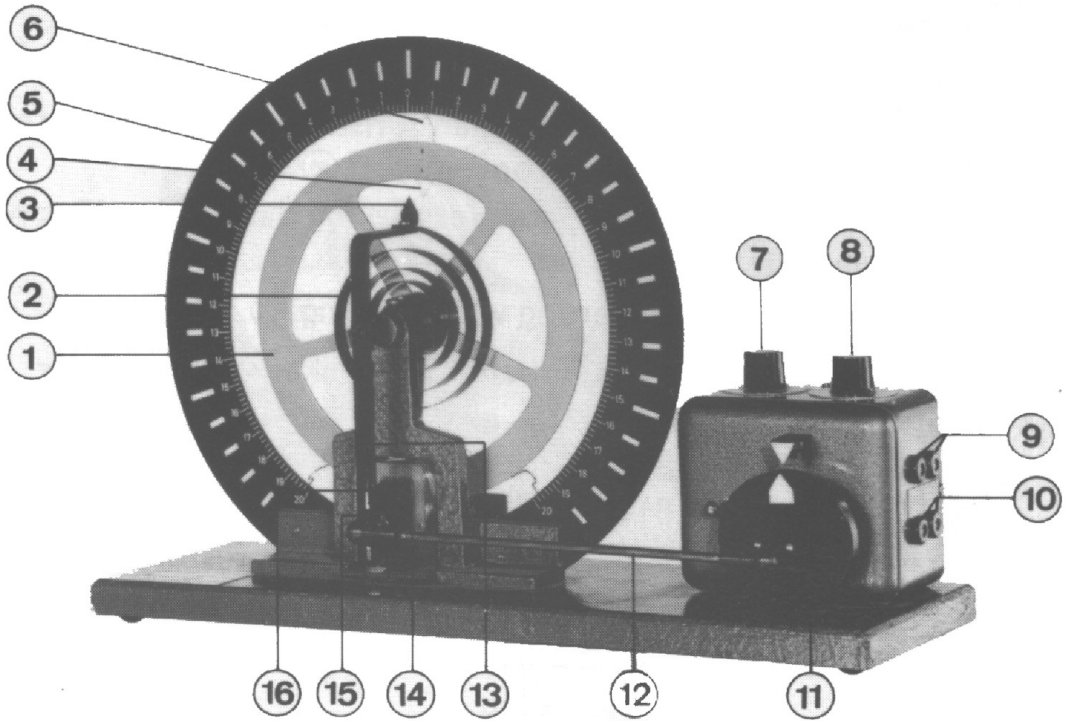


Abbildung N02.1: Pohlsches Drehpendel

1, 2 *Drehpendel*, bestehend aus *Pendelkörper* **1** aus Kupfer und *Schneckenfeder* **2**; ein Ende der Feder ist mit einem Schwingungserreger **13** verbunden.
3, 4 *Vergleichsanzeiger* für Phasenlagen des Schwingungserregers (**3**) und des Drehpendels (**4**).
5 *Skalenring* zur Amplitudenmessung der Drehschwingung; zur Projektion in Abständen von je 5 Skalenteilen geschlitzt.
6 *Amplitudenanzeiger*
9 *Anschlussbuchsen* für Versorgungsspannung des Motors.
11 *Antriebsrad* mit Exzenter.
12 *Schubstange*.
13 *Schwingungserreger*, mit Feder **2** des Drehpendels verbunden.
14 *Schlitz* zur Verschiebung des Angriffspunktes der Schubstange **11** am Schwingungserreger **13** (Amplitudeneinstellung des Schwingungserregers).
15 *Schraube* zur Halterung der Schubstange **12** in **14**.
16 *Elektromagnet* zur Wirbelstrombremsung des Drehpendels; 4 mm-Anschlußbuchsen für Spulenstrom an der Rückseite.

Technische Daten:
Eigenfrequenz: ca. 0,5 Hz
Erregerfrequenz: (0,1 – 1,2) Hz
Motorspannung: maximal 20 V
Stromaufnahme: maximal 600 mA
Wirbelstromdämpfung: (0 – 20) V
Belastbarkeit der Spulen: kurzzeitig maximal 2 A

Aufgabe N02.c: *Tragen Sie die gemessenen Amplituden φ gegen die Anzahl n der Perioden in ein halblogarithmisches Diagramm ein (3 Dekaden). Bestimmen Sie gemäß Anhang A1 die Ausgleichsgerade*

$$\ln \varphi_n = \ln \varphi_0 - (\beta T)n \tag{N02.2}$$

und aus ihrer Steigung

$$\Delta \ln \varphi_n / \Delta n = -\beta T =: -\ln K \tag{N02.3}$$

das Dämpfungsverhältnis K und die Güte $Q = \pi/(\beta T)$.

Vorsicht: Der Magnet der Wirbelstrombremse darf höchstens 2 – 3 Minuten mit Strömen über 1 A betrieben werden!

N02.2.2 Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

Bei diesem Experiment wird die Amplitude φ als Funktion der Frequenz ν bzw. ω, d.h. die Resonanzkurve, gemessen. Der Motor wird dazu mit einer stabilisierten Spannung betrieben (an Klemmen (9) anschließen), wobei die Frequenz eine gut reproduzierbare Funktion der Spannung ist. Die Spannung wird an einem Digitalvoltmeter (DVM) abgelesen, welches im Versorgungsgerät eingebaut ist.

Aufgabe N02.d: *Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen der Frequenz des Exzenters (11) und der Motorspannung bei 4 geeignet gewählten Frequenzen im Bereich von (0,1 – 1) Hz, indem Sie die Zeit für mindestens 10 Umdrehungen stoppen. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Frequenz und Spannung auf mm-Papier (DIN A4) grafisch dar.*

Aufgabe N02.A: *Welche Maßeinheit hat das Amplitudenquadrat φ^2?*

Aufgabe N02.e: *Messen Sie nun für 2 verschiedene Stärken der Dämpfung (I_m = (0,3 und 0,5) A) die Amplitude φ als Funktion der Frequenz ν bzw. ω, d.h. die Resonanzkurve.*

$$\varphi(\omega) = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \dfrac{\omega^2 \cdot \omega_0^2}{Q^2}}} \tag{N02.4}$$

Legen Sie hinreichend viele Messpunkte in den relativ schmalen Resonanzbereich. Eine Messung kann erst erfolgen, wenn der Einschwingvorgang hinreichend abgeklungen ist. Beobachten Sie daher, ob der stationäre Zustand erreicht ist.

Es empfiehlt sich, zuerst die Kurve mit der starken Dämpfung zu messen (warum?). Tragen Sie die Messwerte in ein Diagramm (φ gegen ν, $\nu = 1/T$) ein und zeichnen Sie die beiden Resonanzkurven. Bestimmen Sie die Frequenz ν aus der Motorspannung mit Hilfe der oben durchgeführten Kalibration.

Aufgabe N02.f: *Bestimmen Sie die Güte Q aus dem Abstand $\Delta\nu$ der beiden Frequenzen, für welche die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$-fache der Maximalamplitude abgesunken ist und der Frequenz ν_0, bei der die Maximalamplitude auftritt, mit $Q = \nu_0/\Delta\nu$.*

Bestimmen Sie ferner die Güte Q aus dem Verhältnis der Amplituden $\varphi(\omega = \omega_0)$ und $\varphi(\omega \to 0)$.

Vergleichen Sie diese beiden Werte für Q mit denen, die Sie aus der freien Schwingung ermittelt haben.

Versuch N06

Trägheitsmoment und Physisches Pendel

Lernziel: Der wichtige physikalische Begriff des Trägheitsmomentes soll verstanden werden. Hierzu wird aus den Erhaltungssätzen der Mechanik das Trägheitsmoment eines Rades bestimmt und das Physische (= körperhafte, reale) Pendel untersucht. Als Anwendung wird aus der periodischen Bewegung die Erdbeschleunigung g bestimmt.

Kenntnisse: Energie und Arbeit, Drehmoment, Trägheitsmoment, Drehimpuls; Newtonsche Bewegungsgleichung, Erhaltungssätze der Mechanik; Drehbewegung um körperfeste Achsen, Steinerscher Satz; mechanische Pendel, ungedämpfte freie Schwingungen, Eigenfrequenz

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik

Messgeräte: Stoppuhr, Zollstock

N06.1 Trägheitsmoment eines Rades

N06.1.1 Erläuterungen

Die Erhaltungssätze der Mechanik folgen aus Symmetrieeigenschaften der Natur. Sie sind Integrale der Bewegungsgleichungen und daher sehr hilfreich bei deren Lösung. Sie erlauben es, Anfangs- und Endzustand eines Systems miteinander in Beziehung zu setzen, ohne dass man über den zeitlichen Ablauf zwischendurch etwas wissen muss.

An einem einfachen Beispiel sollen diese Erhaltungssätze experimentell überprüft werden: Ein Rad wird in Rotation versetzt, indem es über eine, mit einem Gewicht belastete Schnur angetrieben wird. Das Trägheitsmoment des Rades wird einmal über den Energiesatz durch die Messung der erreichten Winkelgeschwindigkeit, zum anderen über den Drehimpuls als Zeitintegral des Drehmomentes durch eine Fallzeitmessung bestimmt.

Bestimmung des Trägheitsmomentes mit dem Energiesatz. Indem das antreibende Gewicht der Masse m aus der Höhe h absinkt, wird seine potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Die Bewegung beginnt bei $t = 0$ aus der Ruhe; das System hat dann die potentielle Energie des Gewichts mgh. Zu einer späteren Zeit t besteht die kinetische Energie des Systems aus der Translationsenergie der sich absenkenden Masse $1/2mv^2(t)$ und der Rotationsenergie des Rades $1/2\Theta\omega^2(t)$ (Trägheitsmoment des Rades: Θ). Die Bewegungen von Rad und Gewicht sind über die Abrollbedingung $v(t) = \omega(t) \cdot r$ verknüpft (Radius der benutzten Schnurrille = Scheibenradius

r). Zum Zeitpunkt t_h sei die Masse m um die Strecke h abgesunken. Dann ergibt sich nach dem Energiesatz:

$$mgh = 1/2(\Theta + mr^2) \cdot \omega^2(t_h). \tag{N06.1}$$

Bestimmung des Trägheitsmomentes mit dem Drehimpulssatz. Die absinkende Masse übt ein konstantes Drehmoment $\vec{M}$ auf das System aus und ändert dessen Drehimpuls in der Zeit $\Delta t = t_h$ von Null auf den Wert $\vec{L}(t_h)$.

Das Drehmoment $\vec{M}$ hat den Betrag $M = r \cdot mg$, sein Zeitintegral ist:

$$\int_0^t M dt = rmg \cdot t. \tag{N06.2}$$

Zur Zeit t beträgt der Betrag des Drehimpulses des Radsystems

$$L_{\text{Rad}}(t) = \Theta \cdot \omega(t) \tag{N06.3}$$

und der des Drehimpulses des Gewichtes

$$L_{\text{Gewicht}}(t) = mr \cdot v(t) = mr^2 \cdot \omega(t). \tag{N06.4}$$

Der Gesamtdrehimpuls ist gleich dem Zeitintegral des Drehmomentes:

$$rmg \cdot t_h = (\Theta + mr^2) \cdot \omega(t_h). \tag{N06.5}$$

Aufgabe N06.A: *Mit welcher Beschleunigung sinkt die Masse m im Radsystem?*

Aufgabe N06.B: *Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Radsystems. Dazu berechnen Sie die Trägheitsmomente beider Räder nach $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$ (Trägheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe bei Rotation um die Symmetrieachse). M ist die Masse und r der Radius einer Scheibe. Die Daten der Räder finden Sie in Abschnitt N06.1.2.*

N06.1.2 Versuchsdurchführung

Für diesen Versuch sind ein großes und ein kleines Rad fest miteinander verbunden und können sich einschließlich ihrer Achse in Kugellagern leicht drehen; alles zusammen bildet das Radsystem (Abb. N06.1). Eine Schnur, an der ein Gewicht von 25 g oder 50 g Masse hängt, kann wahlweise um das große oder das kleine Rad gewickelt werden. Die Fallhöhe, die das Gewicht durchläuft, kann durch Verstellen einer Startmarkierung wahlweise auf (25, 50, 75 oder 100) cm eingestellt werden. Die Daten der Räder sind mit vernachlässigbar kleinen Fehlern:

Großes Rad:	Radius $r = 10\,\text{cm}$,	Dicke $d = 2\,\text{cm}$
Kleines Rad:	Radius $r = 2{,}5\,\text{cm}$,	Dicke $d = 1\,\text{cm}$

Die Räder sind aus einer Aluminiumlegierung mit einer Dichte von $2{,}7\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}$ gefertigt; das Trägheitsmoment der Achse kann vernachlässigt werden. Die gesamte Anordnung muss vor dem Versuch mit 3 Fußschrauben senkrecht justiert werden.

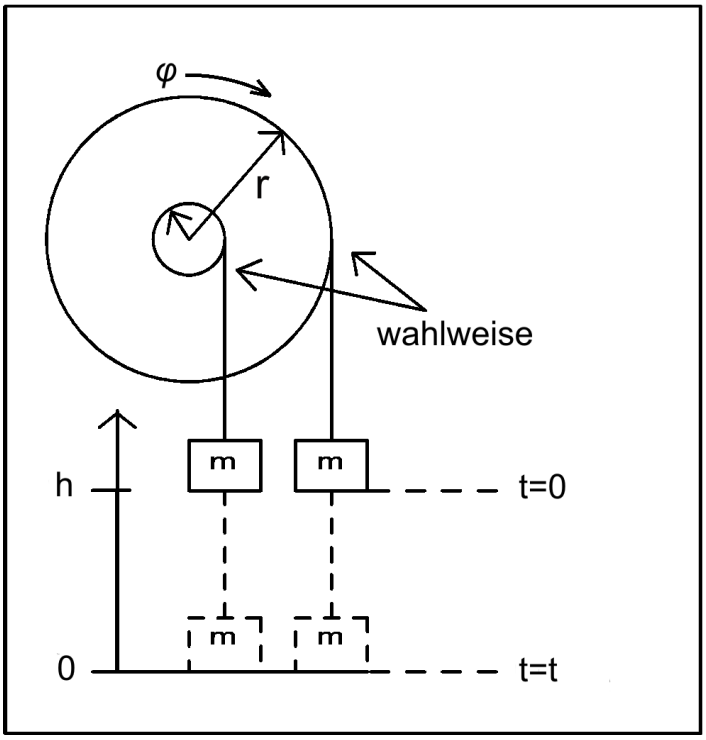


Abbildung N06.1: Skizze des Radsystems

Aufgabe N06.a: *Bestimmen Sie für beide Gewichte unter Benutzung beider Raddurchmesser das Trägheitsmoment des Radsystems sowohl über Gleichung N06.1 als auch über Gleichung N06.5. Es sollen für:*

- *die beiden Massen,* $m = (25 \text{ und } 50)\,\mathrm{g}$
- *die beiden Schnurrillenradien,* $r = (2{,}5 \text{ und } 10)\,\mathrm{cm}$
- *alle 4 einstellbaren Fallhöhen,* $h = (100, 75, 50 \text{ und } 25)\,\mathrm{cm}$

jeweils die Fallzeit t_h *und unmittelbar nach dem Auftreffen des Gewichtes auf der unteren Bühne die* **Umlaufzeit** $T(n)$ *für* n *Umläufe gemessen werden. Die Umlaufzeit* $T(n)$ *wird durch* n *geteilt um* $T(1)$*, die Zeit für eine Umdrehung, zu erhalten. Die Zahl* n *der Umläufe wird so gewählt, dass eine Messzeit von etwa 10 Sekunden resultiert (warum?).*

Für alle $2 \times 2 \times 4 = 16$ *Parametersätze werden Fallzeit* t_h *und Umlaufszeit* $T(n)$ *jeweils einmal gemessen, für die Parametersätze mit* $h = 100\,\mathrm{cm}$ *jedoch dreimal (Schwankungen?) und daraus gemittelt. Die Kreisfrequenz* $\omega = 2\pi/T(1)$ *wird errechnet.*

Aufgabe N06.b: *Für die Energiesatz-Methode wird das Quadrat der Kreisfrequenz* ω^2 *gegen die Fallhöhe* h *aufgetragen, für alle* $2 \times 2 = 4$ *Parametersätze auf einem Blatt. Aus der Steigung der Anpassungsgeraden soll* $(\Theta + mr^2)$ *und daraus* Θ *errechnet werden. Wie groß ist der Fehler?*

Aufgabe N06.c: *Für die Drehmomentsatz-Methode wird die Kreisfrequenz* ω *gegen die Fallzeit*

t_h aufgetragen, ebenfalls für alle 4 Parametersätze auf einem Blatt. Aus der Steigung der Anpassungsgeraden soll ($\Theta + mr^2$) und daraus Θ errechnet werden. Wie groß ist der Fehler?

Aufgabe N06.d: *Vergleichen Sie die gemessenen Trägheitsmomente mit dem aus den angegebenen Daten berechneten Trägheitsmoment.*

N06.2 Physisches Pendel

N06.2.1 Erläuterungen

Eine runde Scheibe pendelt um eine Achse A im Abstand a vom Schwerpunkt S der Scheibe (Abb. N06.2). Der Abstand a kann stufenweise verändert werden. Die Schwingungsdauer T ist gegeben durch:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\Theta}{D}. \tag{N06.6}$$

Das Trägheitsmoment Θ einer Scheibe mit Radius r und Masse m um die Achse A bestimmt sich nach dem Steinerschen Satz zu:

$$\Theta = \Theta_{\text{Sch}} + ma^2, \tag{N06.7}$$

wobei Θ_{Sch} das polare Trägheitsmoment der Scheibe ist.

$$\Theta_{\text{Sch}} = \frac{1}{2} mr^2. \tag{N06.8}$$

Das Drehmoment $M = -D\varphi$ wird durch die Erdanziehung bewirkt, also $M = -a \cdot mg \sin\varphi$. Für kleine Auslenkungen φ kann man näherungsweise $\sin\varphi \approx \varphi$ setzen. Daraus folgt: $M = -a \cdot mg\varphi$, und damit $D = a \cdot mg$. Man erhält für das Quadrat der Schwingungsdauer T:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\Theta_{\text{Sch}} + ma^2}{amg}, \tag{N06.9}$$

oder:

$$aT^2 = \frac{4\pi^2 \Theta_{\text{Sch}}}{mg} + \frac{4\pi^2}{g} \cdot a^2. \tag{N06.10}$$

Die grafische Darstellung von aT^2 gegen a^2 ergibt eine Gerade. Aus der Steigung lässt sich die Erdbeschleunigung g und aus dem Achsenabschnitt das polare Eigenträgheitsmoment der Scheibe Θ_{Sch} bestimmen.

Aufgabe N06.C: *Geben Sie die Formel für das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe mit n Löchern im Abstand a_n von der Drehachse senkrecht durch den Scheibenmittelpunkt S an (siehe Abb. N06.2). Hinweis: Subtrahieren Sie den Beitrag der Löcher mit Hilfe des Steinerschen Satzes.*

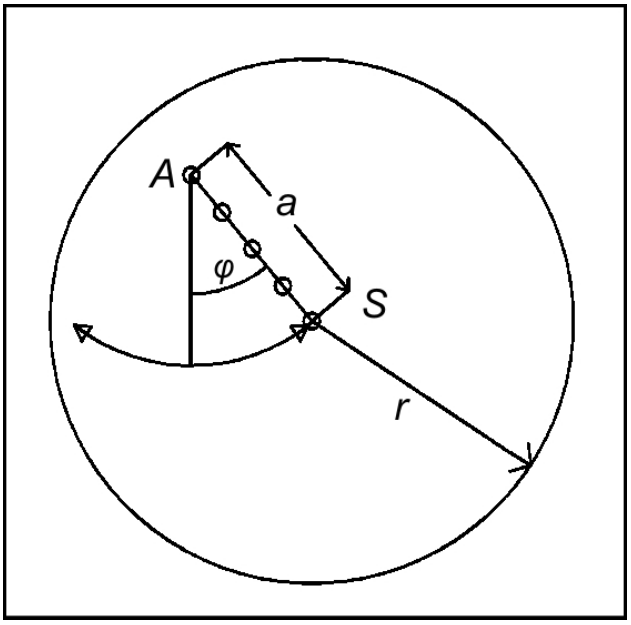


Abbildung N06.2: Skizze des im Versuch eingesetzten Physischen Pendels

N06.2.2 Versuchsdurchführung

Justieren Sie mit Hilfe der Dosenlibelle und den 3 Fußschrauben die die Bodenplatte der Pendelhalterung so, dass sie waagerecht steht. Mit dem justierten Aufbau messen Sie die Erdbeschleunigung g und das Trägheitsmoment der Scheibe Θ_{Sch} einschließlich der Fehlergrenzen:

Aufgabe N06.e: *Messen Sie für alle vorgesehenen Achsenlagen A die Schwingungsdauer T über mindestens 10 Perioden und berechnen Sie die dazu gehörigen Fehlergrenzen für T. Die Amplitude darf nur wenige Grad betragen. Tragen Sie aT^2 und die dazugehörigen Fehlerbalken für aT^2 (Fehlerfortpflanzungsgesetz!) gegen a^2 auf. Ermitteln Sie aus der Fit-Geraden die Erdbeschleunigung g und das Trägheitsmoment Θ_{Sch} mit den dazugehörigen Fehlergrenzen.*

Aufgabe N06.f: *Vergleichen Sie den so gewonnenen Wert für die Erdbeschleunigung mit dem wirklichen Wert und das gemessene Trägheitsmoment mit dem aus der Formel $\Theta_{\mathrm{Sch}} = mr^2/2$ berechneten Wert.*

Aufgabe N06.g: *Überlegen Sie, wie die Schwingungsdauer T von a abhängen muss, und skizzieren Sie diese. Führen Sie gedanklich die Grenzübergänge $a \to \infty$ und $a \to 0$ durch.*

Aufgabe N06.h: *Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe N06.C und setzen Sie die Zahlenwerte für „Ihre“ Scheibe ein (die Scheibenmasse m ist in die Scheibe eingeschlagen). Sie messen den Scheibenradius r, den Durchmesser und die Lochabstände der 9 Löcher. Wie groß ist der Unterschied zu einer ungelochten Scheibe?*

Versuch N14

Statistik

Lernziel: Der Versuch führt in die statistischen Gesetzmäßigkeiten der Zählung voneinander unabhängiger Ereignisse ein. Sie sollen verfolgen, wie zufällige Ereignisse mit wachsender Zahl durch wohldefinierte Häufigkeitsverteilungen beschrieben werden können.

Insbesondere soll demonstriert werden, dass unter der Bedingung unabhängiger Ereignisse die relative statistische Unsicherheit eines Zählergebnisses der Quadratwurzel aus der Zahl der registrierten Ereignisse umgekehrt proportional ist. Der Umgang mit den statistischen Verteilungen und mit den Begriffen der Fehlerrechnung soll geübt werden.

Schließlich soll am Bespiel von Geradenfits die Abschätzung von Modellparametern aus gegebenen Daten durchgeführt werden.

Kenntnisse: Elementare Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, z.B. Spiel mit mehreren Würfeln; Poisson-, Gauss- und Binomial-Verteilungen; Fehlerrechnung; Normalverteilung; Bedeutung des Standardfehlers; Fehlerfortpflanzungsgesetz

Literatur: Stuart-Klages, Kurzes Lehrbuch des Physik; Riezler-Kopitzki, Kernphysikalisches Praktikum: 1.41 (Verteilungen); Berkeley Physik-Kurs Bd. 5 (Kap. 2.1–2.4, Anhänge A1 und A2)
Zur Fehlerrechnung:
Westphal, Physikalisches Praktikum: Kap. 1, 7–11, Anhang III;
Walcher, Praktikum der Physik: Kap. 1.2;
Geschke, Phys. Praktikum: Kap. 1.5, 1.6;
H. Neuert, Physik für Naturwissenschaftler

N14.1 Erläuterungen

Dieser Versuch soll mit einigen statistischen Konzepten und Methoden vertraut machen, die einem bei der Auswertung von Messergebnissen immer wieder nützliche Dienste erweisen werden. Dabei werden zwei Schwerpunkte gesetzt: Zum einen werden häufig benötigte Wahrscheinlichkeitsverteilungen vorgestellt und angewendet, zu anderen soll mit Methoden der Parameterschätzung und der Fortpflanzung von Unsicherheiten vertraut gemacht werden.

N14.1.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie gibt Antwort auf die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit P von n **unabhängigen** „ja/nein"-Entscheidungen, deren jede mit der Wahrscheinlichkeit p positiv verläuft, insgesamt k positiv ausfallen. Die Binomialverteilung ist für alle ganzzahligen $0 \leq k \leq n$ definiert und enthält die Größen p und n als Parameter:

$$P_{\mathrm{B}}(k; p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{N14.1}$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{N14.2}$$

Dabei ist $n!$ (lies: „n Fakultät") definiert als $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, mit der Konvention $0! = 1$. Der Erwartungswert der Binomialverteilung ist $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{n} k P_{\mathrm{B}}(k; p, n) = np$. Als Maß für die Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert dient die **Varianz** V, welche für die Binomialverteilung gegeben ist als:

$$V = \left\langle (k - \langle k \rangle)^2 \right\rangle = n \cdot p \cdot (1-p). \tag{N14.3}$$

Sie hat allerdings eine andere Einheit als die ihr zugrunde liegenden Daten. Um die Streuung der Daten in der gleichen Einheit anzugeben, verwendet man die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V}$, welche für die Binomialverteilung gegeben ist als:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}. \tag{N14.4}$$

In Abb. N14.1 ist die Binomialverteilung $P_{\mathrm{B}}(p = 1/7)$ für $n = 4$ und $n = 20$ skizziert.

Bei fast allen Zusammenhängen in der Natur, in denen die Binomialverteilung eine Rolle spielt, ist n sehr groß. Im Grenzfall $n \to \infty$ konvergiert die Binomialverteilung gegen die Poisson- oder Gaußverteilung, je nachdem wie groß die Einzelwahrscheinlichkeit p und der Mittelwert sind. Mit ihnen wollen wir uns in diesem Versuch näher beschäftigen.

Negative Binomialverteilung (Pascal-Verteilung)

Während die Binomialverteilung beschreibt, wie die Anzahl k der Erfolge bei festem Stichprobemumfang n fluktuiert, charakterisiert die negative Binomialverteilung, auch Pascal-Verteilung genannt, die Fluktuationen des Stichprobenumfangs n, wenn man eine vorgegebene Anzahl k von Erfolgen wünscht:

$$P_{NB}(n; p, k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \tag{N14.5}$$

$P(n; p, k)$ ist somit die Wahrscheinlichkeit, n Versuche zu benötigen, um k Erfolge zu erzielen, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt.

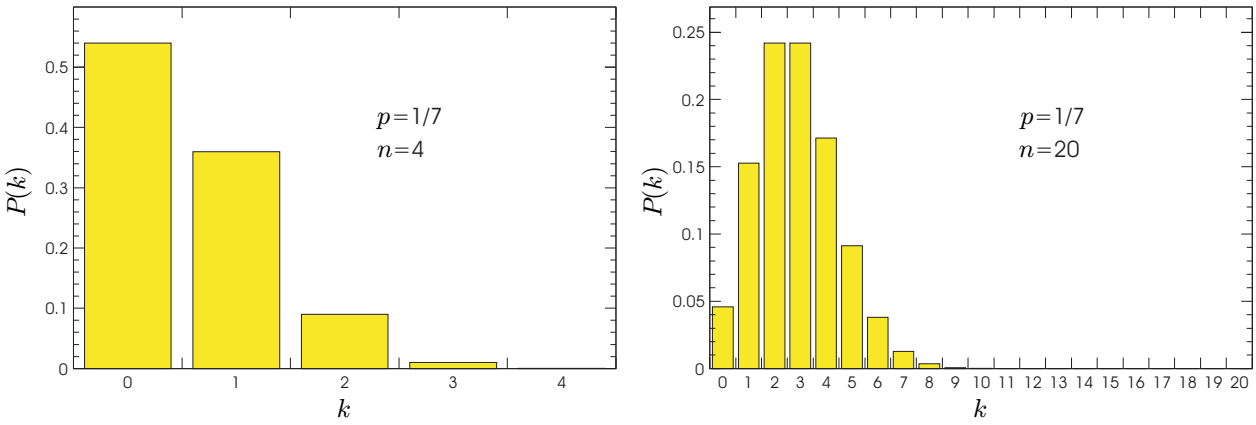


Abbildung N14.1: Beispiele für Binomalverteilungen.

Der Erwartungswert $\langle n \rangle$ der negativen Binomialverteilung ergibt sich zu

$$\langle n \rangle = \frac{k}{p}, \tag{N14.6}$$

Varianz V und Standardabweichung σ lauten:

$$V = \frac{k(1-p)}{p^2} \tag{N14.7}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}. \tag{N14.8}$$

Poisson-Verteilung

Wenn die Zahl n der Entscheidungen sehr groß, die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten eines Einzelereignisses jedoch sehr klein ist, vereinfacht sich die Binomialverteilung zur Poisson-Verteilung. Beispielsweise können alle n instabilen Atomkerne eines radioaktiven Präparats in einem vorgegebenen Zeitraum T zerfallen. Ist jedoch T sehr klein gegen die Halbwertszeit $T_{1/2}$, dann ist die Wahrscheinlichkeit p für den Zerfall jedes einzelnen Kerns sehr gering, so dass insgesamt innerhalb der Zeit T sehr wahrscheinlich nur wenige Zerfälle eintreten. Bei jeder Messung der Zerfälle über die Zeit T trifft die Natur n unabhängige Entscheidungen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p \ll 1$ für einen Kernzerfall, von denen insgesamt k positiv ausfallen, wobei k im Mittel gleich $\langle k \rangle = np$ ist.

Die Poisson-Verteilung hängt nur von einem einzigen Parameter, dem Mittelwert $pn = \mu$, ab $(n \gg 1, p \ll 1)$:

$$P_{\mathrm{P}}(k;\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}. \tag{N14.9}$$

Mittels der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^{\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \tag{N14.10}$$

beweist man leicht folgende Eigenschaften der Poisson-Verteilung:

1. Die Wahrscheinlichkeiten sind normiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{\mathrm{P}}(k;\mu) = 1\,. \tag{N14.11}$$

2. Der Parameter μ ist der Erwartungswert von k:

$$\langle k \rangle \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_{\mathrm{P}}(k;\mu) = \mu. \tag{N14.12}$$

3. Der Erwartungswert von k^2 berechnet sich zu

$$\left\langle k^2 \right\rangle \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P_{\mathrm{P}}(k;\mu) = \mu^2 + \mu = \langle k \rangle^2 + \langle k \rangle\,. \tag{N14.13}$$

   Beachten Sie die Positionen der Exponenten bezüglich der Mittelung.

Aus diesen Gleichungen folgt ferner die sehr wichtige Beziehung zwischen der mittleren Streuung σ_k, also dem Fehler der einzelnen Stichprobe, und dem Erwartungswert:

$$\sigma_k^2 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (k - \langle k \rangle)^2 \cdot P_{\mathrm{P}}(k;\mu) = \mu = \langle k \rangle\,, \tag{N14.14}$$

d.h. das Quadrat der mittleren Streuung ist gleich dem Erwartungswert $\langle k \rangle$. Der Schwankungsbereich einer Stichprobe um den Erwartungswert $\langle k \rangle$, repräsentiert durch die Streuung σ, nimmt betragsmäßig mit wachsendem Erwartungswert zu, $\sigma = \sqrt{\langle k \rangle}$, relativ zum Erwartungswert jedoch ab, $\sigma / \langle k \rangle = 1/\sqrt{\langle k \rangle}$. Die relative Unsicherheit eines großen Zählergebnisses ist deshalb viel geringer als die eines kleinen.

Gauß-Verteilung

Betrachten wir nun den Fall, dass weiterhin n sehr groß, p fast beliebig, doch $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \gg 1$. Dann erstreckt sich die Binomialverteilung über viele k und geht bei ganzzahligem Argument in eine verhältnismäßig einfache, glatte Funktion über. Diese Funktion ist ein Spezialfall der Gauß- oder Normalverteilung

$$P_{\mathrm{G}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{N14.15}$$

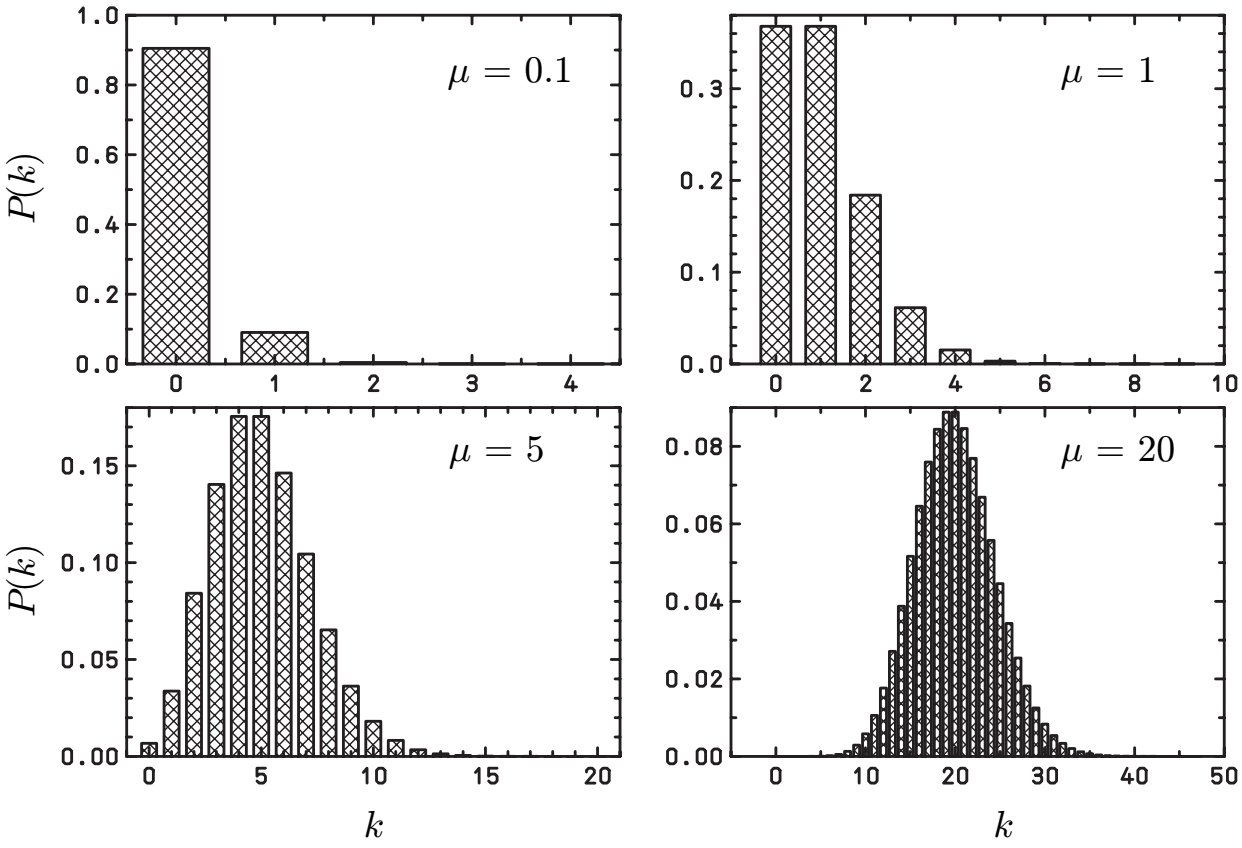


Abbildung N14.2: Beispiele für Poisson-Verteilungen.

mit dem Mittelwert $\mu = n \cdot p$
und der Streuung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu(1-p)} = \sqrt{\langle k \rangle (1-p)}$:

$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle k \rangle (1-p)}} e^{-\frac{(k-\langle k \rangle)^2}{2\langle k \rangle (1-p)}} \qquad (n \gg 1,\ \sqrt{\langle k \rangle (1-p)} \gg 1). \tag{N14.16}$$

Für $p \ll 1$ vereinfacht sich diese Verteilung weiter zu:

$$P_{\mathrm{L}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle k \rangle}} e^{-\frac{(k-\langle k \rangle)^2}{2\langle k \rangle}} \qquad (n \gg 1, p \ll 1, \langle k \rangle \gg 1). \tag{N14.17}$$

Während die allgemeine Form der Gaußverteilung N14.15 zwei unabhängige Parameter μ und σ besitzt, hat die Verteilung N14.17, wie die Poisson-Verteilung, nur noch einen Parameter und stellt deren Grenzfall für $\mu \gg 1$ dar. Die Gleichungen N14.12, N14.13 und N14.14 gelten daher auch für diese Verteilung. Während die Poisson-Verteilung für kleine μ asymmetrisch ist, geht sie für $\mu \gg 1$ in eine um den Mittelwert μ symmetrische Glockenkurve (Gleichung N14.36) über (siehe Abb. N14.2). Für alle diese Verteilungen gilt, dass ihre relative Breite ($\sim \sigma / \langle k \rangle$) für große $\langle k \rangle$ wie $1/\sqrt{\langle k \rangle}$ geht und damit sehr klein wird.

Dieses Resultat ist von fundamentaler Bedeutung für einen großen Teil der Physik und für die gesamte Chemie. Ein paar einfache Beispiele: Von den n Wasserstoffmolekülen in einem Behälter ist im Gleichgewicht jedes mit einer gewissen (temperaturabhängigen) Wahrscheinlichkeit p dissoziiert. Die Wahrscheinlichkeit, k dissoziierte Moleküle ($2k$ Atome) zu finden, ist also durch eine Binomialverteilung gegeben. Wegen der Größe von n, und damit (selbst bei sehr kleinem p) auch von $\langle k \rangle$, wird diese zu einer Gauß-Verteilung, die so schmal ist, dass sie bei allen messbar vom Mittelwert abweichenden k verschwindet. Entsprechendes gilt für chemische Reaktionsgleichgewichte oder etwa für die Zahl der Moleküle in einem Teilvolumen eines Gasraums. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik ist eine statistische Aussage über das **mittlere** Verhalten vieler Systeme, die dem gerade betrachteten gleichartig sind. Wegen der stets ungeheuer großen Teilchenzahl ($\sim 10^{23}$) sind die relativen Abweichungen vom Verhalten des Mittelwertes unmessbar klein, und Aussagen über diesen erhalten praktisch den Charakter absoluter Sicherheit.

Aufgabe N14.A: *Lösen Sie die folgenden Aufgaben:*

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch ein Sonntagskind ist, beträgt $p = 1/7$, wenn man annimmt, dass alle Wochentage gleich wahrscheinlich sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(k)$, unter n zufällig herausgegriffenen Personen k Sonntagskinder zu finden?

2. Beim Wurf einer Münze liegt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ die Seite mit der Zahl oben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen beim Wurf von n Münzen k mal die Zahl oben?

3. In einem Gasvolumen V befinden sich n Moleküle. Für jedes Molekül ist die Wahrscheinlichkeit, sich in einem Teilvolumen $pV (0 \leq p \leq 1)$ aufzuhalten, gleich p. Wie viele Moleküle μ befinden sich im Mittel in diesem Teilvolumen, und wie groß sind die zeitlichen Schwankungen σ um diesen Mittelwert?

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Teilchendetektor ein Teilchen registriert, sei 95 %. Wie viele Detektoren sind hintereinander zu reihen, damit mit 99,9 % Wahrscheinlichkeit mindestens einer anspricht, wenn man annimmt, dass das Teilchen alle Detektoren passiert? Wie viele müssen es sein, damit mit 99,9 % Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Detektoren ansprechen?

5. Gegeben sei ein Detektorsystem aus zwei Detektoren, die beide unabhängig voneinander bestimmte Teilchen nachweisen können. Die beiden Detektoren seien dabei so installiert, dass Teilchen stets beide Detektoren passieren. Vor dem eigentlichen Messbetrieb beschließt man den Detektorkomplex mit einem Teststrahl und kommt zu folgendem Ergebnis: 5000 mal hat Detektor 1 und 6000 mal hat Detektor 2 angesprochen. Ferner haben 3000 mal beide Detektoren bei demselben Ereignis angesprochen. Wie groß sind die Effizienzen ϵ_1 und ϵ_2 von Detektor 1 und 2, ein Teilchen nachzuweisen? Wie groß sind die Messunsicherheiten $\Delta\epsilon_1$ und $\Delta\epsilon_2$ für die beiden Effizienzen?

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass bei einer Gruppe von n Personen, mindestens 2 Leute am gleichen Tag des Jahres Geburtstag haben? Gehen Sie von einem Jahr mit 365 Tagen aus!

7. Das Volumen V einer Kugel soll durch eine Durchmessermessung bestimmt werden. Der gemessene Durchmesser sei D_0 und seine Messungenauigkeit betrage ΔD. Wie groß ist die Messunsicherheit ΔV für das Volumen der Kugel?

8. Das Trägheitsmoment Θ einer Kugelschale mit Masse m, Innenradius r und Außenradius R lautet bei Rotation um eine Achse durch den Mittelpunkt

$$\Theta = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}. \tag{N14.18}$$

   Eine Messung hat für die Masse und die Radien folgende Werte ergeben: $m = m_0$, $r = r_0$ und $R = R_0$. Die zugehörigen Messunsicherheiten seien Δm, Δr und ΔR. Mit welcher Genauigkeit $\Delta\Theta$ lässt sich daraus das Trägheitsmoment der Kugelschale bestimmen, wenn man annimmt, dass die Messungen von m, r und R unkorreliert sind?

N14.1.2 Zu den Versuchen

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im ersten Versuchsteil soll die Statistik von Teilchenzerfällen untersucht werden. Dazu wird das oben angeführte Beispiel des radioaktiven Zerfalls benutzt, indem N mal ($N \geq 300$) die Zahl k der innerhalb einer festen Zeit T registrierten Zerfallsprozesse in einem radioaktiven Präparat gemessen wird. Wir wollen uns vorstellen, dass wir die Messergebnisse k_i ($i = 1, \ldots, N$) nach Art einer Strichliste in ein Häufigkeitsdiagramm eintragen:

Die Strichliste nimmt die Form eines Histogramms an (Abb. N14.3, wobei die Zahl n_k der Striche in einer Säule angibt, wie oft das Zählergebnis k aufgetreten ist. Das Diagramm zeigt damit

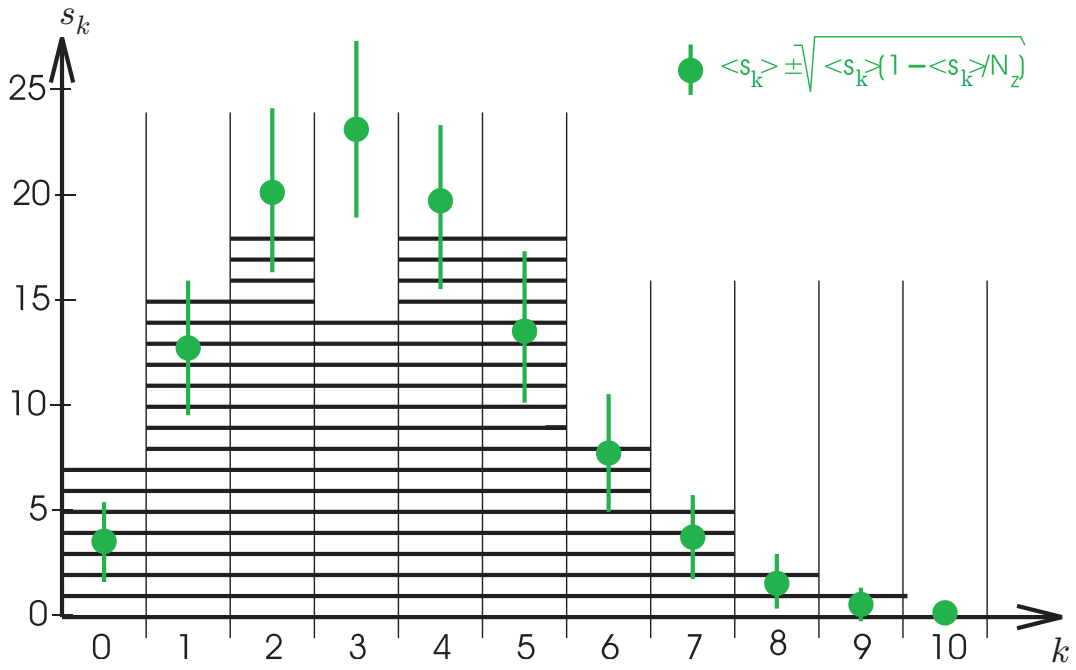


Abbildung N14.3: Histogramm

unmittelbar die Stichprobenverteilung. Damit haben wir aus der unendlichen Menge aller denkbaren Messungen (Grundgesamtheit) eine Stichprobe von $N = \sum_{k=0}^{\infty} n_k$ Messungen genommen. Die Aufgabe besteht aus folgenden Punkten:

1. Bestimmung eines Schätzwertes $\hat{\mu}$ für den (unbekannten) Erwartungswert μ der Grundgesamtheit.

2. Abschätzung der Unsicherheit des Schätzwertes $\hat{\mu}$ von μ.

3. Überprüfung der Voraussetzung, dass die Grundgesamtheit einer Poisson-Verteilung folgt. Dazu ist zu zeigen, dass die (aus dem statistischen Charakter des Experiments unvermeidbar folgenden) Abweichungen zwischen der Verteilung der Stichprobe und der Poisson-Verteilung mit $\mu = \hat{\mu}$ innerhalb der Erwartung liegen („statistisch nicht signifikant sind“).

Diese Aufgaben lösen wir nun nacheinander mit Hilfe der **Fehlertheorie**. Dabei ist sorgfältig zwischen dem Schätzwert für eine Größe und ihrem (in der Regel unbekannten) wahren Wert zu unterscheiden. Zur besseren Unterscheidung kennzeichnen wir Schätzer mit einem Hut-Symbol.

1. Als Schätzer $\hat{\mu}$ für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit dient üblicherweise der (arithmetische) Mittelwert der Stichprobe:

$$\mu \approx \hat{\mu} \equiv \bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i. \tag{N14.19}$$

Diese Summe über Einzelmessungen der Anzahl von Zerfällen pro Messintervall läßt sich auch darstellen als Summe über Histogramm-Säulen:

$$\overline{k} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} k \frac{n_k}{N} \tag{N14.20}$$

mit $k_{\max} = \max_{i=1,\ldots,N} k_i$.

2. Jeder der Messwerte k_i ($i = 1, \ldots, N$) ist mit einem Fehler $|k_i - \mu|$ behaftet. Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzungsformel gilt für die Unsicherheit $\Delta\hat{\mu}$ unseres Schätzers $\hat{\mu}$:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\mu} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial k_i}\right)^2 (k_i - \mu)^2} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial k_i}\sum_{j=1}^{N} k_j\right)^2 \left(k_i - \overline{k}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(k_i - \overline{k}\right)^2}. \end{aligned} \tag{N14.21}$$

Da

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(k_i - \overline{k})^2 \tag{N14.22}$$

ein Schätzer für die Varianz σ_k^2 ist, kann Gleichung N14.21 im Fall großer N, wo $N - 1 \approx N$ gilt, geschrieben werden als

$$\Delta\hat{\mu} \approx \sqrt{\frac{\sigma_k^2}{N}}. \tag{N14.23}$$

Für Poisson-verteilte k_i kann dies wiederum gemäß Gleichung N14.14 geschrieben werden als

$$\Delta\hat{\mu} \approx \sqrt{\frac{\mu}{N}} \approx \sqrt{\frac{\overline{k}}{N}}. \tag{N14.24}$$

3. Es sei $P(k)$ die Wahrscheinlichkeit, k Zerfälle zu zählen. Wenn wir $P(k)$ mit der Gesamtzahl N unserer Messungen multiplizieren, erhalten wir den Erwartungswert für die Höhe n_k der einzelnen Histogramm-Säulen:

$$\langle n_k \rangle = N \cdot P(k). \tag{N14.25}$$

Die Erwartungswerte $\langle n_k \rangle$ bilden die theoretische Verteilung, mit der unsere Stichprobenverteilung zu vergleichen ist. Verschiedene Stichproben liefern jeweils ähnliche, aber wegen der statistischen Natur des Experiments nicht identische Verteilungen.

Um die Übereinstimmung mit der Theorie innerhalb der statistisch erwarteten Schwankungen bestätigen zu können, müssen wir uns über die typische Größe der zufälligen Abweichungen klar werden.

Die Höhe n_k einer jeden Säule schwankt von Stichprobe zu Stichprobe zufällig um den Mittelwert $\langle n_k \rangle$. Die theoretische Häufigkeitsverteilung der **zu festem** k gemessenen n_k und, was uns vor allem interessiert, ihre mittlere Streuung als Maß für die **typische Unsicherheit einer einmaligen Messung von** n_k können wir leicht angeben. Die Säulenhöhe n_k ergibt sich nämlich wieder aus einer großen Zahl ($N \geq 300$) unabhängiger Entscheidungen: Bei jeder der N Messungen einer Stichprobe zeigt der Zähler mit der Wahrscheinlichkeit $P(k)$ die Zahl k und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - P(k)$ irgendeine andere Zahl. Die Frage „Mit welcher Wahrscheinlichkeit finde ich unter N Messungen (= eine Stichprobe, ein einmaliger Versuch) gerade n_k-mal den Wert k?“ wird demnach durch die Binomialverteilung $P_B(n_k; P(k), N)$ beantwortet.

Da N **groß** ist, können wir die Binomialverteilung durch verschiedene einfachere Näherungen ersetzen, je nach Größenordnung der Parameter. Ist $P(k) \ll 1$, so erhalten wir die Poisson-Verteilung (für die ganz kleinen Säulen mit $\langle n_k \rangle \approx 1$) oder - das ist am häufigsten der Fall - die Gauß-Verteilung (für Säulen mit $1 \ll \langle n_k \rangle \ll N$). Säulen, bei denen nicht mehr $P(k) \ll 1$ bzw. $\langle n_k \rangle \ll N$ gilt, unterliegen der Gauß-Verteilung (Gleichung N14.17). Alle diese Verteilungen haben den Mittelwert $\langle n_k \rangle = N \cdot P(k)$.

Auch die Standardabweichung Δn_k können wir aus einer einheitlichen Formel berechnen, denn die Standardabweichung der Binomialverteilung bzw. der Gauß-Verteilung

$$\Delta n_k = \sqrt{N \cdot P(k) \cdot (1 - P(k))} = \sqrt{\langle n_k \rangle \cdot (1 - \langle n_k \rangle)/N)} \tag{N14.26}$$

reduziert sich für $P(k) \ll 1$ automatisch auf

$$\Delta n_k = \sqrt{N \cdot P(k)} = \sqrt{\langle n_k \rangle} \tag{N14.27}$$

der Poisson- oder Gauß-Verteilung zum Erwartungswert $\langle n_k \rangle$. Dies bedeutet, dass statistisch in 68% der Fälle[1] der gemessene Wert n_k vom Erwartungswert $\langle n_k \rangle$ um weniger als

$$\Delta n_k = \sqrt{\langle n_k \rangle \cdot (1 - \langle n_k \rangle)/N)} \tag{N14.28}$$

abweicht. Ist dies bei unserer Stichprobe ungefähr[2] der Fall, so ist dieses Ergebnis statistisch verträglich mit der Hypothese, dass die Grundgesamtheit einer Poisson-Verteilung folgt.

Anmerkung: Wenn man Häufigkeiten von zeitlich statistisch verteilten Ereignissen misst (Beispiele: Verkehrsfluss durch eine nicht voll ausgelastete Landstraße, Einfall kosmischer Strahlung auf eine bestimmte Fläche, radioaktiver Zerfall), zählt man gewöhnlich über eine vorgegebene Zeit. Dann sind praktisch fast immer die Voraussetzungen $n \gg 1$ (Zahl aller Autos, kosmischen Strahlen, instabilen Kerne in der Quelle), $p \ll 1$ (Wahrscheinlichkeit, gerade in dieser Zeit durch diese Straße zu fahren usw.) erfüllt, d.h. man hat es mit Poisson- oder Gauß-Verteilungen zu tun, deren Streuung gleich der Wurzel aus dem Mittelwert ist. Diesen unbekannten Mittelwert schätzt man mangels weiterer Information durch das Zählergebnis selbst ab (Stichprobe vom Umfang eins):

[1] Das Integral der Normalverteilung von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ beträgt 0,68. Für sehr kleine Säulen ($\langle s_n \rangle \sim 1$) muss eigentlich wegen der Asymmetrie der Poisson-Verteilung ein asymmetrischer Fehlerbalken angebracht werden, wovon wir hier jedoch absehen.

[2] 68% gilt im Grenzfall **vieler** Säulen (Messpunkte). Für nur 10 Säulen kann der Wert n_k etwa zwischen $pn \pm \sqrt{np(1-p)} \approx 7 \pm \sqrt{2}$ schwanken (Binomialverteilung zu $p = 0,68, n = 10$ = Zahl der Säulen)

Die statistische Unsicherheit eines solchen Zählergebnisses ist durch seine Quadratwurzel gegeben.

Aufgabe N14.B: *Stellen Sie für die verschiedenen Verteilungen die Formeln für Mittelwert und Streuung und deren Gültigkeitsbereiche in einer Tabelle zusammen.*

Parameterschätzung

Der zweite Versuchsteil widmet sich Parameterschätzungen. Ein häufiges Problem bei der Analyse von Experimentdaten ist es, Modellparameter an Messdaten anzupassen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Anpassung einer Geraden

$$f(x) = mx + n \tag{N14.29}$$

an Messdaten. In diesem Fall hat das Modell zwei Parameter. Häufig wird als Parametrisierung einer Gerade die Steigung m der Geraden und der y-Achsenabschnitt n gewählt. Ausführlichere Informationen zu Geraden-Fits können Anhang A1 entnommen werden.

N14.2 Versuchsaufbau

Dieser Versuch wird vollständig mit Hilfe von Simulationssoftware am Rechner durchgeführt. Als Datenquelle für die durchgeführten Zufallsexperimente dient ein (Pseudo-)Zufallszahlengenerator, der (Pseudo-)Zufallszahlen[3] gemäß den gewünschten Wahrscheinlichkeitsverteilungen generiert.

N14.3 Versuchsdurchführung

Zur Durchführung des Versuches geben Sie bitte die URL

`https://praktikum.physik.uni-bonn.de`

in einem Webbrowser ein. Beim Aufruf der Webseite wird man gebeten, sich über das Single-Sign-On-Portal der Universität mit Ihrer Uni-ID einzuloggen. Wählen Sie anschließend den Statistik-Versuch aus.

Zunächst soll die Poisson-Verteilung

$$P_{\mathrm{P}}(k;\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \tag{N14.30}$$

für unterschiedliche Mittelwerte $\mu = \langle k \rangle$ untersucht werden. Um sich etwas vertrauter mit der Verteilung zu machen, bietet die Software die Möglichkeit, Verteilungen poissonverteilter Zufallszahlen für einstellbare Mittelwerte $0 \leq \mu \leq 100$ zu generieren. Neben dem Mittelwert kann auch die Anzahl N der zu generierenden Zufallszahlen variiert werden. Generieren Sie Verteilungen

[3] Pseudozufallszahlen sind Zahlen, die zufällig erscheinen, in Wirklichkeit aber vorhersagbar gemäß eines Algorithmusses erzeugt werden. Computergenerierte „Zufallszahlen“ sind Pseudozufallszahlen.

für ein paar verschiedene Werte für μ und N (Frage: Wann wird die Poisson-Verteilung deutlich asymmetrisch?).

N14.3.1 Poisson-Verteilung mit kleinem Erwartungswert

Im nächsten Versuchsteil soll die asymmetrische Form der Poisson-Verteilung bei kleinem $\mu = \langle k \rangle$ überprüft werden. Insbesondere soll erfahren werden, dass auch das Zählergebnis Null mit endlicher Häufigkeit vorkommt (Frage: Wie berechnet sich dann der Fehler des Zählergebnisses Null?).

Die Software simuliert folgende Situation: Ein mit einem Detektor verbundenes Zählwerk erfasst die in einem fest gewählten Zeitintervall beobachteten radioaktiven Zerfälle. Dieses Zählexperiment wird 300 mal wiederholt (bei konstant gehaltenem Zeitintervall). Die von der Simulation ausgegebene Wertetabelle enthält zwei Spalten: Die erste Spalte gibt den Zählerstand des Zählwerks wieder, die zweite Spalte die Häufigkeit, mit der dieser Zählerstand bei den 300 Zählexperimenten vorgekommen ist.

Aufgabe N14.a: *Zunächst wird eine relativ schwache bzw. gut abgeschirmte radioaktive Quelle simuliert. Die Zählraten sind entsprechend klein. Übertragen Sie die Zahlen aus der Wertetabelle als Strichliste auf Millimeter-Papier (Abb. N14.3). Die in der Wertetabelle angegebenen Zahlen sind jeweils der Zählerstand und die zugehörige absolute Häufigkeit. Die Strichliste nimmt die Form eines Säulenpolygons an (sog. Histogramm), wobei die Zahl n_k der Striche in einer Säule angibt, wie oft das Zählergebnis k aufgetreten ist. Da 300 Zählexperimente durchgeführt wurden, muss gelten $N = \sum_{k=0}^{\infty} n_k = 300$.*

Aus der Stichprobe wird der (arithmetische) **Mittelwert** als Schätzer für den (unbekannten) Mittelwert

$$\mu \approx \hat{\mu} = \overline{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{n_k}{N} = \frac{0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \ldots}{N} \tag{N14.31}$$

sowie

$$\Delta\hat{\mu} = \sqrt{\frac{\overline{k}}{N}} \tag{N14.32}$$

als Schätzer für die zugehörige **Unsicherheit** bestimmt. Unter Verwendung des Schätzwertes $\hat{\mu}$ für μ und mit Hilfe der aus Gleichung N14.30 folgenden Rekursionsformel für die Poisson-Verteilung

$$P_{\mathrm{P}}(k;\mu) = \frac{\mu}{k} P(k-1) \tag{N14.33}$$

werden von $P(0;\mu) = e^{-\mu}$ aufsteigend die erwarteten Wahrscheinlichkeiten $P(k)$ der Zählergebnisse k berechnet. Die erwarteten Säulenhöhen $\langle n_k \rangle$ ergeben sich zu

$$\langle n_k \rangle = N \cdot P(k). \tag{N14.34}$$

Schließlich werden die *Schwankungsbreiten* Δn_k bestimmt, mit denen die Messwerte erwartungs-

gemäß um die Erwartungswerte $\langle n_k \rangle$ statistisch fluktuieren sollten:

$$\Delta n_k = \sqrt{\langle n_k \rangle \left(1 - \frac{\langle n_k \rangle}{N}\right)}. \tag{N14.35}$$

Tragen Sie $\langle n_k \rangle \pm \Delta n_k$ in Form von „Fehlerbalken“ in das Häufigkeitsdiagramm ein. Verifizieren Sie, dass bei ca. 2/3 der Säulen der Messwert n_k innerhalb dieser „Fehlerbalken“ liegt und somit die gemessene Verteilung innerhalb statistisch erwarteter Abweichungen mit der theoretischen Poisson-Verteilung zu dem abgeschätzten Mittelwert übereinstimmt. Es handelt sich bei diesem „Fehler“ nicht um die Unsicherheit des Erwartungswerts $\langle n_k \rangle$, sondern um die erwartete mittlere quadratische Abweichung eines Messwerts vom Erwartungswert!

N14.3.2 Poisson-Verteilung mit großem Mittelwert

Aufgabe N14.b: *Im nächsten Schritt wird eine stärkere bzw. weniger gut abgeschirmte radioaktive Quelle simuliert. Die in der Wertetabelle angegebenen Zahlen sind wieder der Zählerstand und die zugehörige absolute Häufigkeit. In diesem Fall soll die Strichliste jedoch so angelegt werden, dass die Abzissenachse in Intervalle der Größe $\Delta k = 10$ geteilt wird. Die zum Intervall $k, \ldots, k+9$ ($k = 260, 270, 280, \ldots$) gehörende Säule enthält also $s_k = n_k + n_{k+1} + n_{k+2} + \cdots + n_{k+9} = \sum_{i=0}^{9} n_{k+i}$ Striche. Auch in diesem Fall gilt wieder $N = \sum s_k = \sum n_k = 300$.*

Die gemessene Verteilung soll mit der erwarteten Gauß-Verteilung

$$P_{\mathrm{G}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\mu}} \tag{N14.36}$$

verglichen werden. Hierzu sind durch Abschätzung aus der Stichprobe der Mittelwert

$$\mu \approx \hat{\mu} \equiv \overline{k} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k n_k}{N} \approx \frac{\sum_{k=260;10}^{\infty} (k+5) s_k}{N} \tag{N14.37}$$

(in jedem Zehner-Intervall wird k durch seinen jeweiligen Mittelwert ersetzt) und der Fehler $\Delta\hat{\mu}$ zu berechnen. Da wir die Gauß-Verteilung als Sonderfall der Poisson-Verteilung für große μ ansehen können, gilt Gleichung N14.32 auch hier. Aus Gleichung N14.36 erhalten Sie die erwarteten Wahrscheinlichkeiten $P(k)$, aus Gleichung N14.34 die erwarteten Säulenhöhen $\langle n_k \rangle$. Wegen der Zusammenfassung zu Zehnerintervallen gilt für die erwarteten Säulenhöhen

$$\langle s_k \rangle = \langle n_k \rangle + \langle n_{k+1} \rangle + \cdots + \langle n_{k+9} \rangle \approx 10 \cdot \langle n_{k+5} \rangle = 10 \cdot N \cdot P(k+5). \tag{N14.38}$$

Beispielsweise soll die zwischen 310 und 319 liegende Säule im statistischen Mittel $\langle s_{310} \rangle \approx 10 \cdot N \cdot P(315)$ Striche enthalten.

Tragen Sie analog zu Abschnitt N14.3.1 in der Mitte der Intervalle die erwarteten Höhen $\langle s_k \rangle$ ein und verbinden Sie sie durch eine Gauß-Kurve. Die erwartete mittlere Streuung der gemessenen

Säulenhöhen einer Stichprobe um den Erwartungswert μ ist $\sqrt{\mu} \approx \sqrt{\hat{\mu}}$, während die Unsicherheit $\Delta\hat{\mu}$ des Schätzwertes $\hat{\mu}$ für den Mittelwert μ um den Faktor $\sqrt{N}$ kleiner ist.

Die mittlere Streuung Δs_k der s_k einer Stichprobe um die jeweiligen Erwartungswerte $\langle s_k \rangle$ sind analog zu Gleichung N14.35 durch

$$\Delta s_k = \sqrt{\langle s_k \rangle \left(1 - \frac{\langle s_k \rangle}{N}\right)} \tag{N14.39}$$

gegeben. Tragen Sie die Erwartungswerte $\langle s_k \rangle$ zusammen mit den Schwankungsbreiten $\pm\Delta s_k$ in das Häufigkeitsdiagramm ein und prüfen Sie, ob bei ca. 2/3 der Säulen die Abweichung zwischen Erwartungswert und Messwert innerhalb dieses „Fehlerbalkens“ liegt, d.h. die gemessene Verteilung verträglich mit der Annahme einer Gauß-Verteilung zum Mittelwert μ ist.

N14.3.3 Geraden-Fit

Im nächsten Schritt bekommen Sie einen Datensatz bestehend aus 10 Messwerten, an die eine Gerade angepasst werden soll. Die erzeugte Wertetabelle besitzt vier Spalten mit folgender Bedeutung:

Spaltennummer	Bedeutung
1	x-Wert
2	x-Unsicherheit
3	y-Wert
4	y-Unsicherheit

Bitte beachten Sie, dass in der Wertetabelle ein Punkt anstelle eines Kommas zur Darstellung nichtganzer Zahlen verwendet wird (wie im angelsächsischen Raum üblich und von vielen Computerprogrammen erwartet). Je nach Spracheinstellung des Computers, der zur Datenanalyse verwendet wird, müssen die Punkte ggf. durch Kommata ersetzt werden.

Aufgabe N14.c: *Zeichnen Sie die Daten aus der Wertetabelle in ein Koordinatensystem auf Millimeterpapier. Fitten Sie eine Gerade unter Verwendung der in Anhang A1 angegebenen Formeln an die Messdaten. Setzen Sie dabei alle x-Unsicherheiten auf Null. Geben Sie sowohl die sich aus dem Fit ergebenen Schätzer für die Geradensteigung m und den y-Achsenabschnitt n als auch deren Unsicherheiten an. Zeichnen Sie die gefittete Gerade in das Koordinatensystem mit dem Messwerten.*

Versuch N32

Gleichströme, Spannungsquellen und Widerstände

Lernziel: Der Versuch behandelt die Themen „Spannungsquelle“ und „Widerstand“ und verwendet Kompensations- und Brückenschaltungen.

Er soll mit charakteristischen Eigenschaften von Spannungsquellen wie Leerlaufspannung, Innenwiderstand und Klemmenspannung vertraut machen. Als wichtiges Beispiel für die Modifizierung einer vorhandenen Spannungsquelle zur Erfüllung äußerer Anforderungen wird die Spannungsteilerschaltung vorgestellt. Das Verhalten eines Spannungsteilers unter Belastung wird gemessen, und Kriterien für die Auslegung einer solchen Schaltung werden erarbeitet. Eine Spannungsquelle mit variabler Klemmenspannung wird zur Messung der Leerlaufspannung einer Batterie mit Hilfe einer Kompensationsschaltung genutzt.

Die Messung ohmscher Widerstände, sowohl absolut mit Strom- und Spannungsmessgeräten und den erforderlichen Korrekturen als auch relativ mit der Wheatstoneschen Brückenschaltung, soll geübt werden. Zudem sollen charakteristische Leitertypen durch Messung der Temperaturabhängigkeit ihres elektrischen Widerstandes unterschieden und verstanden werden.

Kenntnisse: Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze, spezifische Leitfähigkeit von Leitern, Halbleitern und Isolatoren, Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes, Leitungsmechanismen

Ideale und reale Spannungsquelle, Innenwiderstand von Spannungsquellen, Leerlauf- und Klemmenspannung, Aufbau und Wirkungsweise eines Normalelementes und einer Batterie, Spannungsteiler, Lastanpassung

Ampère- und Voltmeter, Innenwiderstand dieser Messgeräte, Veränderung des Messbereichs durch Parallel- bzw. Serien-/Vorwiderstand und deren Einfluss auf die Messung;

Potentiometerschaltung, Wheatstonesche Brückenschaltung, Kompensationsschaltung

Geräte:

- Helipot
- Mavometer
- Drehspulmessgerät
- Nullinstrument
- Digitalmultimeter

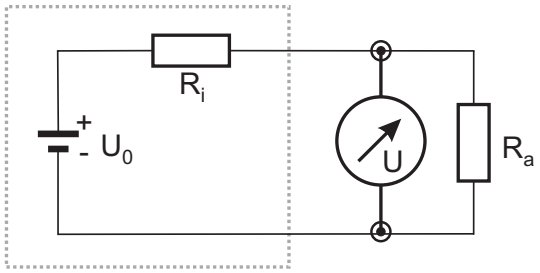


Abbildung N32.1:
Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle

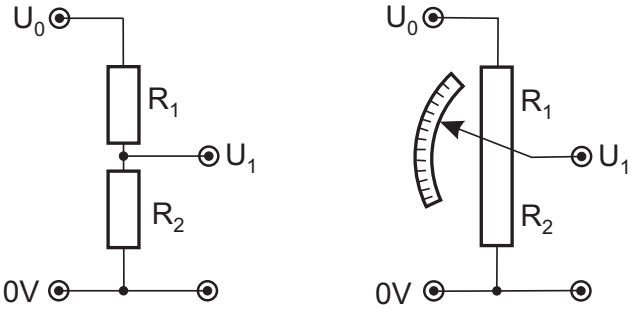


Abbildung N32.2:
Spannungsteiler- bzw. Potentiometerschaltung

N32.1 Erläuterungen

N32.1.1 Spannungs- und Stromquellen

Eine **ideale Spannungsquelle** liefert eine vom entnommenen Strom unabhängige Spannung U_0. Eine **reale Spannungsquelle** liefert eine stromabhängige Spannung. In einem Ersatzschaltbild wird sie dargestellt als ideale Spannungsquelle mit dahinter geschaltetem **Innenwiderstand** R_i (Abb. N32.1). Die **Klemmenspannung** U beträgt

$$U = U_0 - R_i I = U_0 \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i} = U_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a}}. \tag{N32.1}$$

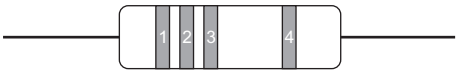
Sie ist lastabhängig. Mit abnehmender Belastung, d.h. $R_a \to \infty$, gilt $U \to U_0$. Daher heißt U_0 **Leerlaufspannung**. Für eine gegebene Spannungsquelle sind U_0 und R_i i.a. Konstanten. R_i ist differentiell definiert: $R_i := \frac{\partial U}{\partial I}$.

N32.1.2 Widerstände

Kommerzielle Widerstände gibt es in verschiedenen Ausführungen. Sie unterscheiden sich hauptsächlich in ihrer maximal erlaubten Belastung. Gebräuchlich sind (1/8, 1/4, 1/2 und 1) W-Widerstände. Man erkennt ihren Widerstandswert an einem Farbcode. Er besteht meist aus 4 Ringen, wobei die ersten 2 den Widerstandswert angeben, der 3. den Multiplikator und der 4. die Toleranz (Abb. N32.3). Widerstände hoher Genauigkeit haben 5 oder 6 Ringe. Hier geben die ersten drei den Widerstandswert an, Ring 4 den Multiplikator und Ring 5 die Toleranz. Ein eventueller 6. Ring gibt den Temperaturkoeffizienten an. Ein Widerstand mit der Farbcodierung gelb-violett-schwarz hat also einen Wert von 47 Ω.

N32.1.3 Spannungsteiler- und Potentiometerschaltung

Häufig möchte man sich mit einer vorhandenen Spannungsquelle U_0 eine geeignete Klemmenspannung U_1 herstellen. Dies kann man entweder durch eine Spannungsteilerschaltung (R_1 und R_2 fest) oder durch eine Potentiometerschaltung, bei der sich der Gesamtwiderstand $R = R_1 + R_2$



Farbe	1.Ring 1. Ziffer	2.Ring 2. Ziffer	3.Ring Multiplikator	4. Ring Toleranz
silber			10^{-2}	10%
gold			10^{-1}	5%
schwarz		0	10^{0}	
braun	1	1	10^{1}	1%
rot	2	2	10^{2}	2%
orange	3	3	10^{3}	
gelb	4	4	10^{4}	
grün	5	5	10^{5}	0.5%
blau	6	6	10^{6}	0.25%
violett	7	7	10^{7}	0.1%
grau	8	8	10^{8}	
weiß	9	9	10^{9}	

Abbildung N32.3: Farbcodierung von Widerständen mit vier Ringen

kontinuierlich teilen lässt (Abb. N32.2) realisieren. Einstellbare Spannungsteiler sind häufig so ausgebildet, dass man statt der Widerstandswerte R_1 (oder R_2) dazu proportionale Größen wie z.B. eine Länge x (beim Schiebewiderstand) oder Skalenteile (beim Helipot = helixförmig gewickeltes Langdrahtpotentiometer) abliest.

N32.1.4 Kompensationsschaltung

Mit der hier eingesetzten Kompensationsschaltung nach Poggendorff kann stromlos gemessen und daher die Leerlaufspannung einer unbekannten Spannungsquelle ermittelt werden, ohne diese zu belasten. Die Stromlosigkeit wird mit einem Nullinstrument (Galvanometer mit Nullpunkt in Skalenmitte) festgestellt. Zum Nullabgleich genügt es nicht, wenn der Zeiger auf null zeigt; vielmehr darf der Zeiger beim Betätigen des Tasters nicht mehr zucken.

N32.1.5 Messbereichserweiterung

Drehspulmessinstrumente können je nach Verschaltung Ströme oder Spannungen messen. Die Kenndaten eines Geräts geben seinen Innenwiderstand an und somit (1) den Maximalstrom, der durch die kleine Drehspule fließen darf, und (2) die Maximalspannung, die an der Spule anliegen darf. Diese Kenndaten bestimmen auch die empfindlichsten Messbereiche des Instruments. Diese Messbereiche können durch Beschaltung mit Widerständen vergrößert werden.

Sollen größere Ströme gemessen werden, muss ein entsprechend großer Anteil des Stromes über einen Parallelwiderstand am Messwerk vorbei geleitet werden. Sollen größere Spannungen gemessen werden, muss ein entsprechend großer Spannungsanteil vor dem Messwerk über einem Serien- oder Vorwiderstand abfallen. Drehspulmessinstrumente mit Messbereichsumschalter haben entsprechende Widerstände eingebaut.

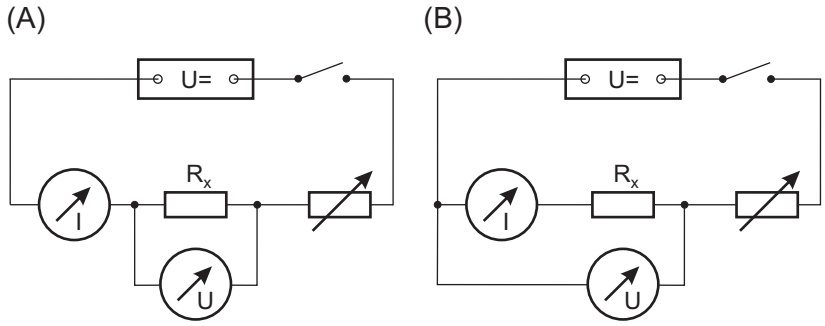


Abbildung N32.4: Schaltungen zur Bestimmung von Widerständen mit einer Strom- und Spannungsmessung.

N32.2 Vor Versuchsbeginn zu erledigende Aufgaben

Aufgabe N32.A: *Definieren Sie eine ideale Stromquelle. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für eine reale Stromquelle.*

Aufgabe N32.B: *Geben Sie eine Messvorschrift an zur Bestimmung der Leerlaufspannung U_0 und des Innenwiderstand R_i einer realen Spannungsquelle.*

Aufgabe N32.C: *Betrachten Sie die Wheatstonesche Brücke (Abb. N32.8).*
Leiten Sie die Beziehung $R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_0$ für die abgeglichene Schaltung ($I = 0$) ab.

Aufgabe N32.D: *Sie wollen mit einem Ampèremeter mit Vollausschlag 1 mA und Innenwiderstand $R_i = 1\,\Omega$ einen Strom von 4 A messen.*
Schlagen Sie eine geeignete Schaltung dafür vor.

Aufgabe N32.E: *Sie wollen mit einem Voltmeter mit Vollausschlag 1 V und Innenwiderstand $R_i = 100\,\mathrm{k}\Omega$ einen Strom von $10\,\mu$A messen.*
Was müssen Sie tun?

Aufgabe N32.F: *Können Sie mit einem Ampèremeter Spannungen messen?*
Welche Bedingungen müssen erfüllt sein?

Aufgabe N32.G: *Geben Sie die Formeln für die Gesamtwiderstände R_A bzw. R_B aus R_x, und den Innenwiderständen von Strom- und Spannungsmesser in den Schaltungen A bzw. B von Abb. N32.4 an.*

N32.3 Versuchdurchführung

N32.3.1 Widerstandsbestimmung durch Strom- und Spannungsmessung

Aufgabe N32.a: *Messen und zeichnen Sie die U-I-Abhängigkeit in einer der beiden Schaltungen aus Abb. N32.4. Benutzen Sie hierbei zwei Mavometer, deren Messbereiche Sie mit Parallel-*

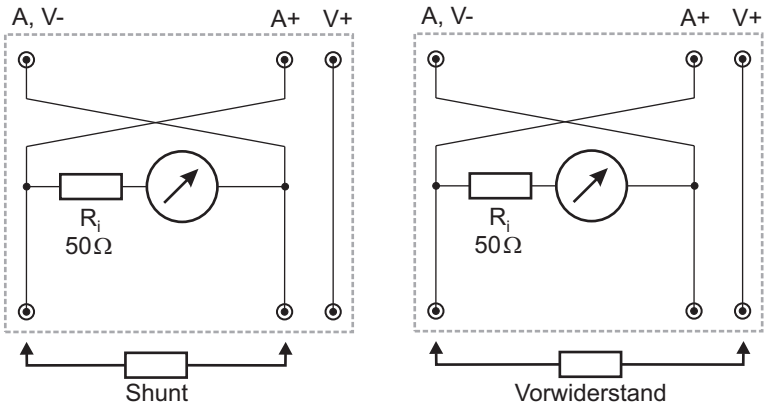


Abbildung N32.5: Aufbau der Messinstrumente: Widerstand des Messwerkes $R_i = 50\,\Omega$; Bei Vollausschlag: $I = 2\,\text{mA}$ bzw. $U = 0{,}1\,\text{V}$. (Mavometer = Milliampere–Volt–Meter).

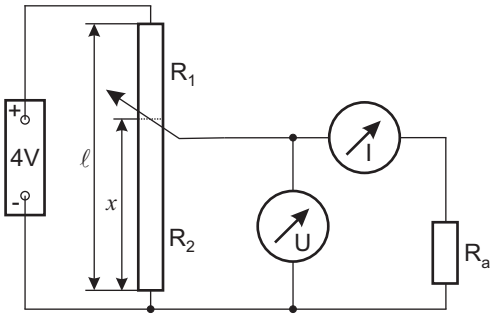


Abbildung N32.6: Belastete Potentiometerschaltung

bzw. Vorwiderständen geeignet einstellen (Abb. N32.5). Bestimmen sie aus der U-I-Kurve zu Schaltung A bzw. B deren Ersatzwiderstand R_A bzw. R_B (= Gesamtwiderstand aus R_x, Strom- und Spannungsmesser).

Aufgabe N32.b: *Berechnen Sie den wahren Wert R_x unter Berücksichtigung der Innenwiderstände der Messinstrumente. Tragen Sie dann zusätzlich die Gerade $U = R_x \cdot I$ in das Diagramm ein.*

Aufgabe N32.c: *Überprüfen Sie den Wert des Widerstandes R_x mit einem Digitalmultimeter.*

N32.3.2 Belastete Potentiometerschaltung

Die vorhandene Spannungsquelle ($(2 - 4)\,\text{V}$) ist stabilisiert, und daher ist $R_i \approx 0\,\Omega$. Bauen Sie damit und aus $R_1 = 20\,\Omega, R_2 = 50\,\Omega$ eine Spannungsteilerschaltung auf (Abb. N32.6). Als Last verwenden Sie die Widerstandskaskade ($R_a = (0 - 130)\,\Omega$). Der Spannungsmesser hat einen relativ hohen Widerstand und stellt somit eine kleine Last dar.

Aufgabe N32.d: *Messen Sie für verschiedene Lastwiderstände R_a (maximal 10 verschiedene R_a) den Strom I durch den Lastwiderstand und die Spannung U über dem Lastwiderstand und*

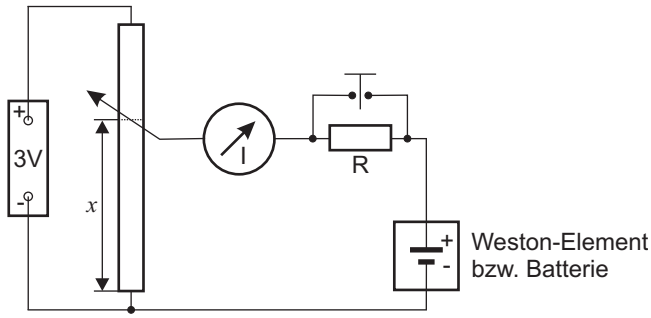


Abbildung N32.7: Kompensationsschaltung nach Poggendorff

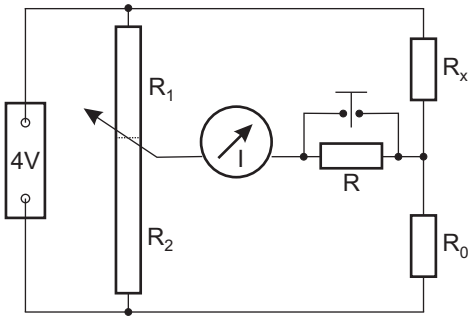


Abbildung N32.8: Wheatstonesche Brücke

dem Ampèremeter. Verwenden Sie das Mavometer zur Strommessung und zur Spannungsmessung. Der Innenwiderstand des Mavometers ist bekannt und soll berücksichtigt werden.

Aufgabe N32.e: *Betrachten Sie die Spannungsteilerschaltung (Spannungsquelle + Spannungsteiler) (Abb. N32.2) als neue Spannungsquelle und das entsprechende Ersatzschaltbild (Abb. N32.1). Bestimmen Sie aus den gemessenen Werten die Größen Innenwiderstand R_i^S und Leerlaufspannung U_0^S. Zeichnen Sie hierzu ein U-I-Diagramm und verifizieren Sie die Relation:*

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I = U_0^s - R_i^s \cdot I \qquad \text{(N32.2)}$$

Was könnten Sie tun, um unter Beibehaltung des Wertes von U_0^S den Innenwiderstand R_i^S zu verkleinern?
Warum kann man das nicht beliebig weit treiben?

Aufgabe N32.f: *Setzen Sie nun anstelle des Spannungsteilers das Potentiometer (Helipot) ein (Abb. N32.6, es werden jeweils nur die Messinstrumente in die Schaltung eingebaut, die benötigt werden.) Bestätigen Sie ohne Last die lineare Relation*

$$U_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 = \frac{x}{\ell} \cdot U_0 \quad . \qquad \text{(N32.3)}$$

Beim Helipot werden die Größen x und ℓ in Skalenteilen abgelesen und angegeben. Wiederholen Sie die Messung für die Lastwiderstände $R_a = 20\,\Omega$ und $R_a = 50\,\Omega$. Zeichnen Sie alles zusammen in ein Diagramm ein und diskutieren Sie das Ergebnis.

N32.3.3 Messung der Leerlaufspannung einer Batterie mit Hilfe einer Kompensationsschaltung (nach Poggendorff)

Ein Weston-Element dient als Spannungsnormal. Seine Spannung beträgt $U = (1{,}0190 \pm 0{,}0005)$ V in unbelastetem Zustand, $I \leq 10^{-5}$ A. Das Nullinstrument ist ein Galvanometer mit Nullpunkt in der Skalenmitte.

Aufgabe N32.g: *Kalibrierung einer Hilfsspannungsquelle (stabilisiertes Netzgerät) durch das Weston Element (Abb. N32.7). Als Potentiometer wird ein Schleifdrahtpotentiometer verwendet.*

Zum Schutz des Normalelements und des Nullinstruments muss zu Beginn ein relativ hoher Widerstand vorgeschaltet werden. Nach erfolgtem groben Abgleich wird dieser zur Erhöhung der Empfindlichkeit mit dem Taster überbrückt. Widerstand und Taster sind in ***einem*** *Kästchen eingebaut.*

Aufgabe N32.h: *Messen Sie die Leerlaufspannung einer Batterie mit Hilfe der kalibrierten Anordnung (Abb. N32.7).*

Wie variiert der Messfehler mit dem x-Wert?
Wäre es gut, ein Spannungselement von 10 V zu verwenden?

Aufgabe N32.i: *Messung der Leerlaufspannung derselben Batterie mit Mavometer und mit Digitalmessgerät. Erklären Sie, warum das Mavometer die Batteriespannung nicht richtig misst.*

N32.3.4 Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke

Bauen Sie die Wheatstonesche Brücke gemäß Abb. N32.8 auf. Als Nullinstrument dient wieder das Pultgalvanometer im grünen Gehäuse mit der Ruhestellung des Zeigers in der Mitte der Skala. Seine Daten sind: Spannung bei Vollausschlag: 4 mV, Innenwiderstand: 100 Ω. **Es darf höchstens zehnfach überlastet werden.**

Aufgabe N32.j: *Bestimmen Sie hiermit einen unbekannten Widerstand R_x. Als Potentiometer wird ein „Helipot“ (Präzisions-Potentiometer mit 1000 Skalenteilen) benutzt.*

Aufgabe N32.k: *Welchen Wert sollte der Widerstand R ungefähr haben, wenn er – bei nicht gedrücktem Taster T – einerseits das Nullinstrument U ausreichend vor Überlastung schützen, andererseits die Empfindlichkeit nicht übermäßig reduzieren soll?*

Versuch N34

Wechselstromwiderstände, RC-Glieder und Schwingungen

Lernziel: Kapazitäten und Induktivitäten sollen mit einer Wechselstrombrücke gemessen werden. Die komplexe Schreibweise und Darstellung von Wechselstromgrößen soll verstanden und geübt werden.

In der Elektronik tritt oft die Aufgabe auf, aus einer Signalspannung, die aus einem Gemisch von Frequenzen besteht, entweder

- alle Frequenzanteile oberhalb („**Tiefpass**“), oder
- alle Frequenzanteile unterhalb („**Hochpass**“), oder
- alle Frequenzanteile in unmittelbarer Umgebung („**Sperrfilter**“)

einer vorgegebenen Frequenz ω_{grenz} weitgehend zu unterdrücken. Dies geschieht mit den in Klammern angegebenen Schaltungstypen, die im wesentlichen aus frequenzabhängigen Widerständen bestehen. Wirkungsweise und Berechnung solcher Schaltungen sollen gelernt werden.

Es ist ein wesentliches Merkmal der Physik, dass mathematisch-physikalische Formalismen von einem Gebiet der Physik auf ein anderes übertragen werden können. Dies soll am Beispiel der „Resonanz“ nachvollzogen werden: alle bei der erzwungenen Schwingung am Drehpendel beobachteten Größen wie Eigenfrequenz, Frequenz der Maximalamplitude, Q-Wert, Resonanzüberhöhung, Resonanzbreite werden auf den elektrischen Schwingkreis übertragen und experimentell bestätigt.

Kenntnisse: Grundbegriffe des Wechselstromes, komplexe Schreibweise, Darstellung von Strom und Spannung als Vektoren in der komplexen Ebene (Vektor- oder „Zeiger“-Diagramm); Wechselstrombrücke, Begriff des Gegeninduktionskoeffizienten von 2 Spulen; Strom-, Spannungs- und Impedanzübersetzung eines Transformators; Hochpass, Tiefpass, Saugfilter, Sperrfilter, Inhalt von Anhang A4; Dämpfungsmaß Dezibel = dB, Kreisgüte Q, Unterdrückungsgüte Q'; elektrischer Schwingkreis, Energiefluss im Schwingkreis; Inhalt von Anhang A2; Oszillograph (siehe Anhang A3).

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik,
z.B. Berkeley Physik-Kurs, Band II, Kap. 8;
Bergmann-Schäfer, Bd. II, Elektrische Schwingungen und Wellen;
Alonso-Finn, Physics; Weizel, Theoretische Physik I, Kap. C IV, §9;

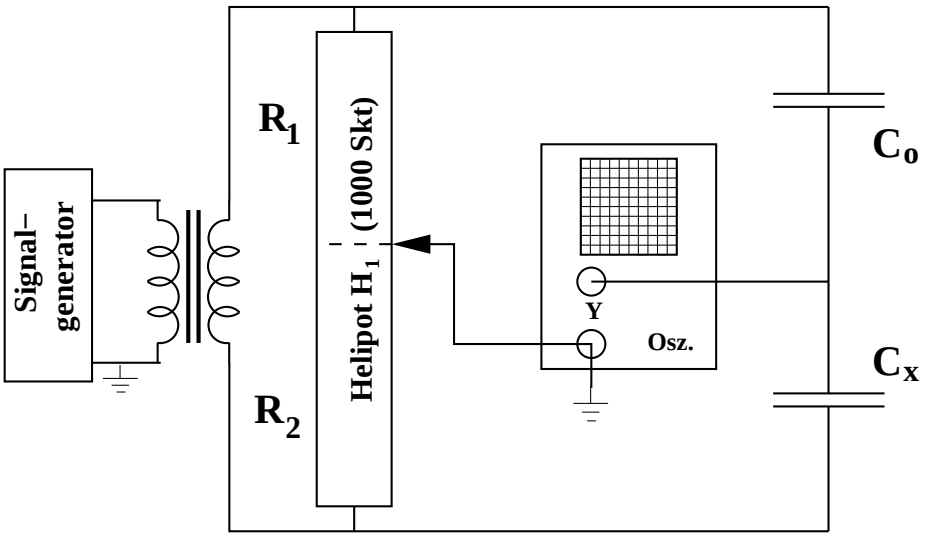


Abbildung N34.1: Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom zur Messung der Kapazität eines Kondensators mit einem Oszillographen als Nullinstrument.

Praktikumslehrbücher: Walcher; Westphal; Geschke;
insbesondere Anhang A4 in dieser Praktikumsanleitung;
Spezielle Literatur: Tietze/Schenk, Passive RC- und LRC-Netzwerke; aktive Filter.

N34.1 Erläuterungen

Die Eigenschaften von Serien- und Parallelschaltkreisen mit Impedanzen (Widerstand R, Kapazität C, Induktivität L) bei anliegender Wechselspannung U_0 folgen – wie auch bei Gleichspannungsschaltungen – aus den Kirchhoffschen Regeln, also aus der Erhaltung der elektrischen Ladung und der Energie.

N34.1.1 Messung von Kapazitäten

Aus der komplexen Abgleichbedingung der Wheatstoneschen Brücke für Wechselstrom (Abb. N34.1),

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_0}{Z_x}, \tag{N34.1}$$

folgt in diesem Fall (verlustfreier Kondensator)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_x}{C_0}. \tag{N34.2}$$

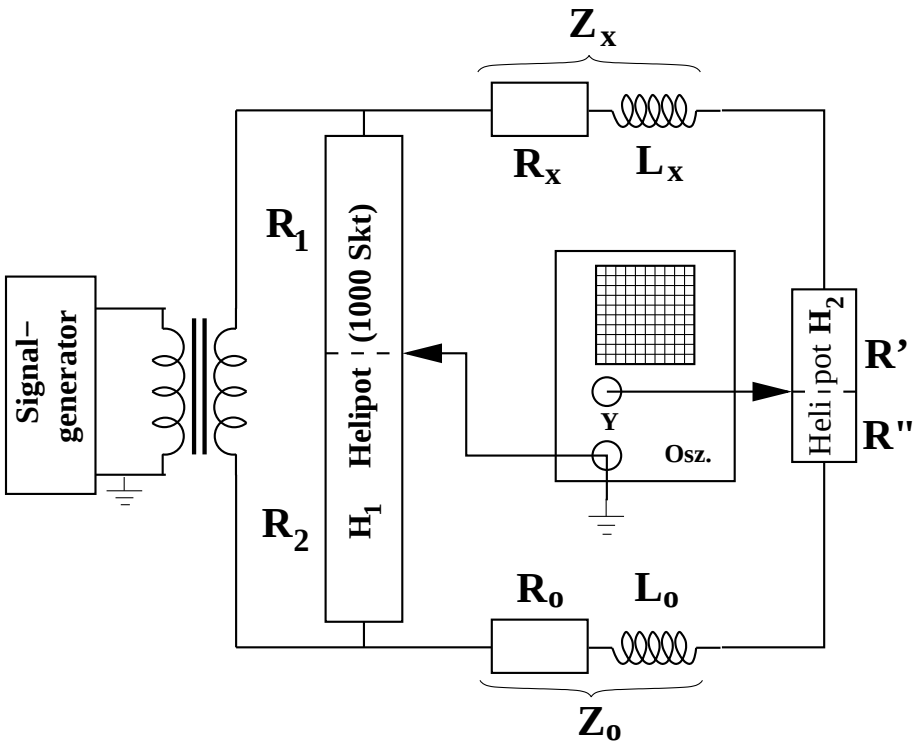
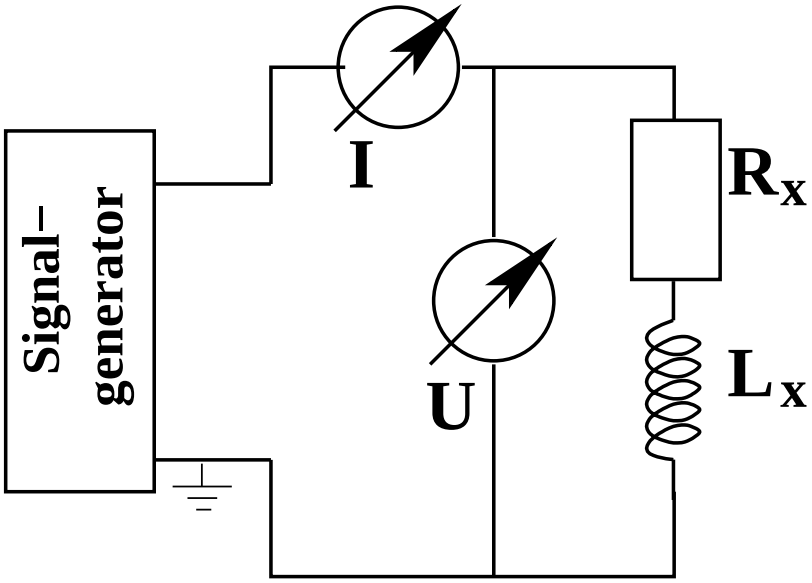


Abbildung N34.2: Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom zur Messung der Induktivität einer Spule mit einem Oszillographen als Nullinstrument.



L_x = Induktivität der unbekannten Spule
R_x = Ohmscher Widerstand der unbekannten Spule
I, U = Messinstrumente für Strom und Spannung

Abbildung N34.3: Strom–Spannungmessung zur Bestimmung eines Wechselstromwiderstands.

N34.1.2 Messung von Induktivitäten

Bei Spulen lässt sich der Ohmsche Widerstand meist nicht vernachlässigen. Die Abgleichbedingung ergibt dann zunächst:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x + i\omega L_x}{R_0 + i\omega L_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_x}{L_0} = \frac{R_x}{R_0}. \tag{N34.3}$$

Beide Bedingungen zugleich lassen sich im allgemeinen nicht ohne weiteres erfüllen. Deshalb benutzen wir ein weiteres Potentiometer H_2 zum Phasenabgleich (Abb. N34.2). Dann lautet die Abgleichbedingung:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_x}{L_0} = \frac{R_x + R'}{R_0 + R''}. \tag{N34.4}$$

Aufgabe N34.A: *Erklären Sie anhand eines Zeigerdiagramms die Wirkungsweise dieses Phasenabgleichs.*

N34.1.3 Messung von Impedanzen

Wechselstromwiderstände können auch durch eine Strom-Spannungsmessung bestimmt werden (siehe Abb. N34.3).

N34.1.4 Elektrischer Schwingkreis

Hier soll verstanden werden, wie die Resonanzkurve, Güte, Eigenfrequenz etc. eines elektrischen Schwingungskreises durch formale „Übersetzung“ der gleichen Größen eines mechanischen Schwingkörpers, in diesem Falle des Drehpendels, gewonnen werden können. Dazu muss man eine Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung aufstellen, die formal der des periodisch angeregten Drehpendels gleicht.

Für den Serienschwingkreis (siehe Abb. N34.5) gilt:

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U_E \cos(\omega t). \tag{N34.5}$$

ω ist die Kreisfrequenz von U_E, also am Generator einstellbar. Die Spannungen auf der linken Seite können durch den Strom $I(t)$, der überall gleich ist, ausgedrückt werden:

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int I\,\mathrm{d}t = U_E \cos(\omega t). \tag{N34.6}$$

Der Strom kann durch die fließende Ladung ausgedrückt werden: $I(t) = \dot{q}(t)$:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U_E \cos(\omega t). \tag{N34.7}$$

Aufgabe N34.B: *Wie lautet die analoge Differentialgleichung des Drehpendels?*

Aufgabe N34.C: *Welches sind korrespondierende physikalische Größen bei Drehpendel und Serienschwingkreis? Was ist die „Auslenkung“ beim Schwingkreis?*

Die Lösung von Gleichung N34.7 für $q(t)$ lautet: $q(t,\omega) = q_0(\omega)\cos(\omega t - \alpha)$ mit

$$q_0(\omega) = \frac{U_E}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega_0^2\omega^2/Q^2}} \tag{N34.8}$$

und

$$\tan\alpha = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{N34.9}$$

Weiter erhält man durch Einsetzen in die entsprechenden Ausdrücke:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad Q = \omega_0\frac{L}{R}\left(= \sqrt{\frac{Z_C Z_L}{R}}\right), \quad \omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \tag{N34.10}$$

Die Ladung $q(t)$ kann leicht als Spannung am Kondensator gemessen werden: $U(t,\omega) = q(t,\omega)/C$ und andererseits $U(t,\omega) = U(\omega)\cos(\omega t - \alpha)$ mit der „Resonanzkurve“

$$U(\omega) = U_E\omega_0^2 \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega_0^2\omega^2/Q^2}}. \tag{N34.11}$$

Für $\omega = \omega_0$ folgt daraus im Maximum $U_0 = U(\omega_0) = U_E Q$. Außerdem ist wie beim Drehpendel: $\omega_0/\Delta\omega \cong Q$.

N34.2 Versuchsdurchführung

Bemerkung:
Es ist unbedingt **vor dem Versuch** die Betriebsanleitung des Oszillographen zu studieren.

Weder ist der Ausgang der Signalgeneratoren erdfrei, noch der Eingang der Oszillographen. Bei den in Abb. N34.1 und N34.2 dargestellten Schaltungen besteht die Gefahr eines Kurzschluss.
Frage: Wieso?
Um das Problem zu lösen, werden die Signalgeneratoren über einen „Trenntrafo“ mit der Schaltung verbunden. Bei der Untersuchung des elektrischen Schwingkreis wird ebenfalls ein „Trenntrafo“ hinter dem Signalgenerator eingesetzt, allerdings aus einem anderen Grund: Der Innenwiderstand der Signalquelle soll herabgesetzt werden.

N34.2.1 Messung von Wechselstromwiderständen

Aufgabe N34.a: *Mit der in Abb. N34.1 dargestellten Schaltung ist die Kapazität eines Kondensators zu messen.*

Aufgabe N34.b: *Mit der in Abb. N34.2 dargestellten Schaltung ist die Induktivität einer Spule zu messen.*

Aufgabe N34.c: *Mit der in Abb. N34.3 dargestellten Schaltung ist die in Aufgabe N34.b benutzte Spule auszumessen. Dabei ist der Einfluss der Messgeräte auf die Messung zu diskutieren. Es ist unter Benutzung des bekannten Spulenwiderstandes (mit einem Unigor oder einem DMM zu messen) ein Zeigerdiagramm zu zeichnen und hieraus L und φ zu bestimmen. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert von L mit dem aus Aufgabe N34.b.*

N34.2.2 Frequenzabhängige Spannungsteiler

Durch den Transformator hinter dem Generator (siehe Abb. N34.5) kann U_e als nahezu widerstandslose Spannungsquelle betrachtet werden, der ein frequenzabhängiger Spannungsteiler nachgeschaltet ist. In allen Fällen ist $R = 100\,\Omega$, $C \approx 1{,}5\,\mu\text{F}$. Die Induktivität L ist eine reine Luftspule mit großem Streufeld. Achten Sie darauf, dass diese nicht nahe bei anderen Geräten und nicht direkt auf der Tischplatte, sondern erhöht steht; der Tisch hat einen metallischen Unterbau, und das Resopal hat oft eine Metalleinlage mit entsprechender Rückwirkung auf das Magnetfeld. Der Ohmsche Widerstand dieser Spule ist bekannt ($R_L \approx 10\,\Omega$) und bleibt zunächst unberücksichtigt.

Aufgabe N34.d: *Für alle drei Schaltungen in Abb. N34.4 ist die Ausgangsspannung $U_A(\nu)$ für festgehaltene Amplitude der Eingangsspannung U_E im Frequenzbereich von (200 – 5000) Hz zu messen und doppeltlogarithmisch in normierten Koordinaten darzustellen.*

1. *Halten Sie die Amplitude von U_E immer konstant!*
2. *Verteilen Sie Ihre zu messenden Frequenzen so, dass diese in einer logarithmischen Frequenzdarstellung einigermaßen gleichmäßig verteilt sind.*
3. *Für die grafische Darstellung normieren Sie wie folgt:*
   - **Abszisse:** $\Omega = \nu/\nu_{gr}$
     → *für Tief- und Hochpass:* $2\pi\nu_{gr} = \omega_{gr} = 1/RC$
     → *für das Sperrfilter:* $\nu_{gr} = \nu_0$ *(aus der Messung)*
   - **Ordinate:** $A = U_A/U_E$
     (A = „Übertragungsfunktion“)
   - *A wird gegen* Ω *doppeltlogarithmisch aufgetragen.*
4. *Tragen Sie in dieser Darstellung eine dB-Skala für die Ordinate ein.*

Aufgabe N34.e: *Für* **Tief- und Hochpass** *sind die Grenzfrequenzen ν_{gr}, bei denen $U_A = U_E \cdot 1/\sqrt{2}$ ist, zu bestimmen und mit dem theoretischen Wert $2\pi\nu_{gr} = \omega_{gr} = 1/RC$ zu vergleichen.*

Aufgabe N34.f: *Für das* **Sperrfilter** *ist die Unterdrückungsgüte*

$$Q'_{exp} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{N34.12}$$

zu bestimmen; $\Delta\nu$ ist der Frequenzbereich, innerhalb dessen $U_A < U_E/\sqrt{2}$ ist. Vergleichen Sie den gefundenen Wert Q'_{exp} mit dem theoretischen Wert

$$Q'_{theo} \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega(3\,\mathrm{dB})} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \tag{N34.13}$$

Beachten Sie: Dieses Q' ist die „Unterdrückungsgüte“ und nicht die Kreisgüte Q; letztere wäre ∞, da wir einen verlustlosen Kreis (d.h. der Ohmsche *Widerstand der Induktivität wird vernachlässigt) vorausgesetzt haben. Auch für reale Filteranordnungen ist die Kreisgüte Q immer noch viel größer als die Unterdrückungsgüte Q'.*

Aufgabe N34.g: *Wodurch wird für das Sperrfilter das größte Abschwächungsverhältnis bestimmt?*

Wie äußert sich die Kreisgüte Q (bestimmt durch den endlichen Spulenwiderstand R_L) in diesem Bild?

N34.2.3 Elektrischer Schwingkreis

Ein Schwingkreis (siehe Abb. N34.5), bestehend aus einem Kondensator C und einer Induktivität L mit dem eigenen Ohmschen Widerstand R_L, wird durch eine angelegte Wechselspannung U_E zum Schwingen angeregt; die erzeugte Schwingungsamplitude U wird am Kondensator als Funktion der Frequenz der Spannung U_E gemessen. Die Spannung U_E ($\approx 0{,}5\,\mathrm{V}$) wird der Sekundärseite eines Transformators entnommen, dessen Primärseite von einem Tonfrequenzgenerator gespeist wird. Der Transformator hat eine Spannungsübertragung von etwa 20:1 und hat den Zweck, den

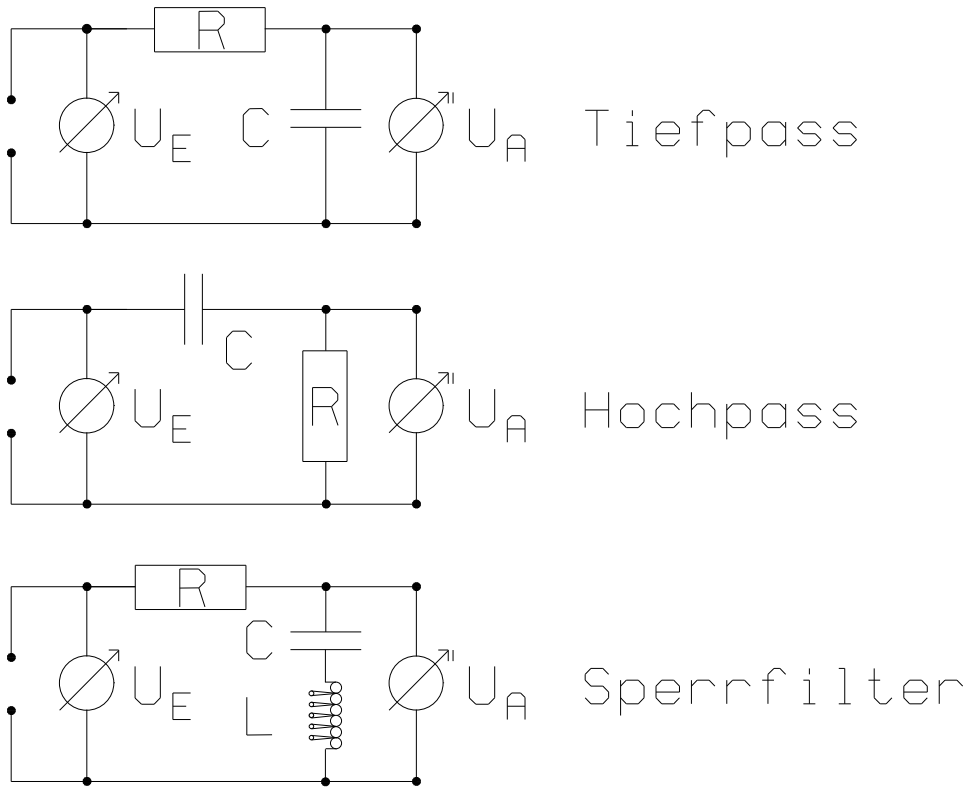


Abbildung N34.4: Frequenzabhängige Spannungsteiler, die als Filter eingesetzt werden können.

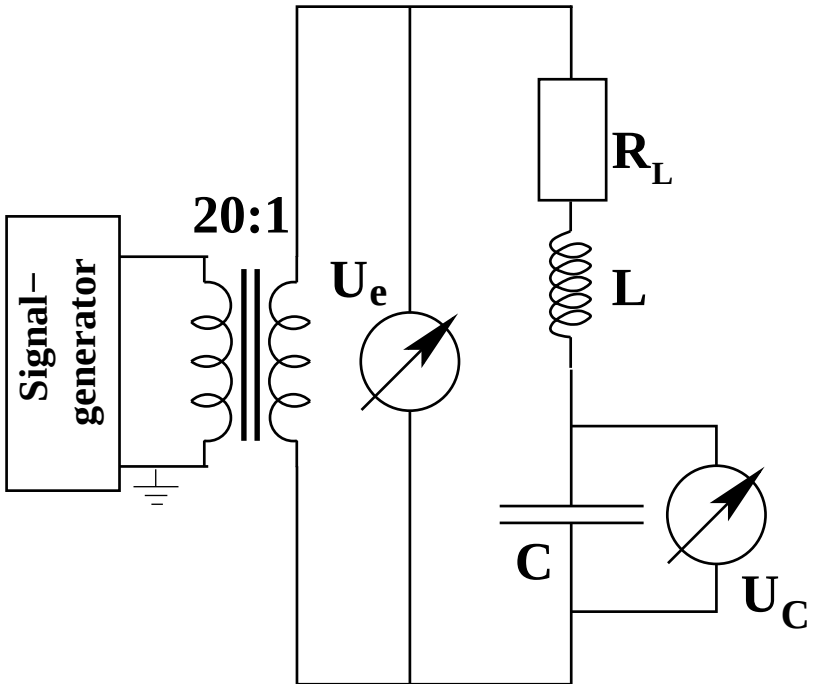


Abbildung N34.5: Elektrischer Schwingkreis.

relativ großen Ausgangs(innen)widerstand des Generators (50 Ω) auf einen sehr kleinen Wert herabzusetzen. Man darf daher die Spannungsquelle U_E als ideale Spannungsquelle, d.h. ohne Innenwiderstand betrachten. Als Induktivität L wird die Luftspule aus Abschnitt N34.2.2 verwendet.

Aufgabe N34.h: *Messen Sie die Resonanzkurve (Spannung über dem Kondensator) mit der vorgesehenen Spule (R_L bekannt) und einer Kapazität von etwa 1,5 µF im Bereich von ungefähr (0 – 2000) Hz.*

Bestimmen Sie aus dieser Messung: ω_0, ω_{max}, L und Q, letzteres aus Resonanzbreite, Resonanzhöhe sowie aus ω_0, L und R_L, also auf drei Weisen.

1. Achten Sie bei der Aufnahme der Resonanzkurve darauf, dass die Amplitude von U_E immer konstant bleibt, was Sie dadurch erreichen können, dass Sie am Tonfrequenzgenerator den Pegel verändern.

2. Verteilen Sie Ihre Messpunkte so, dass Sie im Bereich der Resonanz mehr Punkte haben als auf den Flanken.

3. Zeichnen Sie die Resonanzkurve auf Millimeter-Papier; Sie können hier als Abszisse einfacherweise ν wählen.

4. Dann bestimmen Sie:

   - Q aus der Resonanzüberhöhung:
     $U_A(\omega_{\max}) = Q \cdot U_A(\omega = 0)$,
   - Q aus der Resonanzbreite:
     $\omega_0 = Q \cdot \Delta\omega$ ($\Delta\omega$ aus $1/\sqrt{2}$-Wert),
     $\omega_{\max}$ und ω_0 aus $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$,
     L aus ω_0 und C,
   - Q aus $Q = \omega_0 \cdot L/R_L$.

Versuch N42

Elektrische und magnetische Krafteinwirkung auf geladene Teilchen

Lernziele: Ein Magnetfeld übt auf eine bewegte Ladung eine Kraft aus, sei es ein geladenes Einzelteilchen oder eine geordnete Bewegung vieler Ladungsträger wie z.B. ein Elektronenstrahl oder ein Strom in einem Leiter. Ein elektrisches Feld übt eine Kraft auf eine Ladung aus, egal ob diese stationär ist oder sich bewegt. Die Kraft auf eine Probeladung dient zum Nachweis eines elektrischen Feldes.

Mit einem Fadenstrahlrohr wird das Verhalten eines Elektronenstrahls in einem transversalen, homogenen Magnetfeld demonstriert: der Weg des Elektronenstrahles wird durch das Rekombinationsleuchten ionisierter Gasatome sichtbar. Diese Versuchsanordnung ermöglicht die Bestimmung des Wertes der spezifischen Ladung e/m für langsam bewegte Elektronen.

Kenntnisse: Elementarladung; Lorentz-Kraft; Bewegung von Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern; Erzeugung von Elektronenstrahlen; Biot-Savartsches Gesetz; Magnetfeld von Helmholtz-Spulen; Unterscheidung von magnetischer Flussdichte „$\vec{B}$-Feld“, und magnetischer Feldstärke „$\vec{H}$-Feld“ (siehe z.B. Demtröder Bd. 2, Kap. 3.1); physikalische Maßeinheiten von $\vec{B}$ und $\vec{H}$

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Experimentalphysik;
Praktikumslehrbücher: Walcher, Geschke

Geräte: Es werden Fadenstrahlrohre der Firma LD Didactic eingesetzt.

N42.1 Spezifische Ladung e/m des Elektrons

N42.1.1 Erläuterungen e/m

Prinzip des Fadenstrahlrohrs

Das Fadenstrahlrohr funktioniert folgendermaßen: Aus einem Strahlerzeugungssystem („Elektronenkanone“) bestehend aus Glühkathode, Wehnelt-Zylinder und Anode, tritt ein Elektronenbündel in einen Raum aus, in dem sich Wasserstoff unter einem Druck der Größenordnung (10^{-2} –

10^{-3}) mbar befindet. Die Elektronen stoßen mit Gasmolekülen zusammen und ionisieren sie, so dass der Weg des Elektronenbündels durch leuchtende Gasatome (Rekombination) sichtbar gemacht ist. Die beim Stoß erzeugten Sekundärelektronen fliegen aus dem Strahl heraus, während die trägen positiven Ionen zurückbleiben und wegen ihrer großen Anzahl und ihrer geringen Geschwindigkeit eine starke positive Raumladung bilden. Unter der Wirkung dieser Raumladung werden auf die Elektronen des aus dem Strahlerzeugungssystem austretenden Bündels radial zur Strahlachse Kräfte ausgeübt, die eine Fokussierung des Elektronenbündels zur Folge haben. Es bildet sich ein „Knotenstrahl“ oder, unter gewissen Bedingungen, ein fadenförmiger Elektronenstrahl („Fadenstrahl“) aus, der ohne weitere elektronenoptische Hilfsmittel das Entladungsrohr durchläuft.

Bestimmung der spezifischen Ladung e/m des Elektrons

Auf die Elektronen des Strahles wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}), \tag{N42.1}$$

wobei e die Ladung des Elektrons, $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Elektrons und $\vec{B}$ die magnetische Flussdichte ist. Orientiert man das Fadenstrahlrohr im Magnetfeld der Helmholtz-Spulen so, dass der Fadenstrahl die Elektronenkanone senkrecht zur Magnetfeldrichtung verlässt, erhält man als Betrag der Kraft $F = evB$.

Unter der Einwirkung der Lorentz-Kraft wird der Fadenstrahl zu einem Kreisbogen verformt und bei hinreichend starkem Magnetfeld zu einem Vollkreis mit dem Radius r gebogen. Die auf die Elektronen wirkende Lorentz-Kraft F ist dann betragsmäßig gleich der Zentripetalkraft mv^2/r:

$$e \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{r}. \tag{N42.2}$$

Die Geschwindigkeit der Elektronen folgt aus dem Energiesatz

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \tag{N42.3}$$

wobei U die gesamte (Beschleunigung-)Spannung ist, die zwischen Glühkathode und Anode anliegt. Aus Gleichungen N42.2 und N42.3 folgt unmittelbar für die spezifische Ladung des Elektrons

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2B^2}. \tag{N42.4}$$

Alle Größen auf der rechten Seite von Gleichung N42.4 werden gemessen. Misst man U in Volt, r in Meter und B in Tesla, so erhält man e/m in Maßeinheiten von As/kg.

Bestimmung der magnetischen Flussdichte im Zentrum der Helmholtz-Spulen

Die Anordnung nach Helmholtz zur Erzeugung homogener Magnetfelder besteht aus zwei einzelnen kreisförmigen Leitern mit gleichen Radien, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen Achse im Abstand ihrer Radien liegen. Die beiden Leiter werden so beschaltet, dass sie von demselben

Strom durchflossen werden. Verwendet man statt Einzelleiter Spulen mit größerem Querschnitt, so sind die Abweichungen von der Homogenität klein, wenn man gewisse Bedingungen hinsichtlich des Querschnittes der Spulen beachtet und den Abstand von Spulenmitte zu Spulenmitte gleich dem mittleren Spulenradius macht. Die magnetische Flussdichte im inneren Bereich eines solchen Helmholtz-Spulen-Systems wird mit dem Biot-Savartschen Gesetz berechnet zu

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu_0 \frac{n \cdot I}{R} = 0,716 \cdot \mu_0 \frac{n \cdot I}{R}. \tag{N42.5}$$

Dabei sind R der mittlere Spulenradius bzw. der Spulenabstand, n die Windungszahl einer Spule und I die Stromstärke, die durch die Spulen fließt. Misst man R in m und I in A, so ergibt sich B in Tesla; für μ_0 ist dabei der Wert $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am) = $1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Vs/(Am) einzusetzen.

N42.1.2 Versuchsdurchführung e/m

Das Fadenstrahlrohr (Abb. N42.1) besteht aus einem kugelförmigen Glaskolben mit einem Durchmesser von 160 mm und zwei an gegenüberliegenden Stellen eingeschmolzenen Rohrstutzen. In einem dieser Rohrstutzen sind die Halterungen und Zuführungen für das Strahlerzeugungssystem eingeschmolzen, welches sich im Innern des Kolbens befindet. Die Füllung besteht aus Wasserstoff mit einem Druck von ca. 1 Pa.

Das Fadenstrahlrohr ist in einer Halterung so fixiert, dass die Elektronen senkrecht ins Magnetfeld des – ebenfalls in dieser Haltung montierten – Helmholtzspulenpaares eingeschossen werden. Wenn die Elektronen nicht senkrecht eingeschossen werden, erhält man anstatt einer Kreisbahn einen Schraubenbahn. **Wenn dies der Fall sein sollte, geben Sie bitte Ihrem Assistenten Bescheid, der den Aufbau dahingehend für Sie justiert.** In der Halterung befinden sich die Anschlussbuchsen für das Strahlerzeugungssystem und die Helmholtzspulen mit einem aufgedruckten Schaltschema. Der gesamte Aufbau steht auf einem Drehteller.

Inbetriebnahme und Ausführung von Messungen

Schließen Sie jetzt gemäß des aufgedruckten Schaltschemas das Fadenstrahlrohr an das (gelbe) Röhrennetzgerät an. **Lassen Sie Ihre Verkabelung vor Inbetriebnahme vom Assistenten kontrollieren!** Die Heizspannung (6,3 V ~) wird fest gewählt, während die an das Strahlerzeugungssystem angelegte Beschleunigungsspannung mit Hilfe der im Netzanschlussgerät eingebauten Potentiometer eingestellt werden kann. Mit Hilfe der Spannung am sog. Wehneltzylinder kann der Elektronenstrahl fokussiert werden.

Die Helmholtz-Spulen mit einem Radius und einem Abstand von 150 mm haben jeweils 130 Windungen pro Spule. Schließen Sie diese an das (schwarze) Netzgerät zur Stromversorgung an. Die Spulen dürfen mit einem maximalen Strom von 2 A (kurzzeitig 2,5 A) betrieben werden.

Vor der Inbetriebnahme des Fadenstrahlrohres überzeugt man sich davon, dass die beiden Potentiometer für Anodenspannung und Wehnelt-Spannung auf Null stehen. Durch diese Maßnahme vermeidet man, dass beim Einschalten der Heizspannung an Gitter oder Anode des Strahlerzeugungssystems Spannung liegt. Man schließt auf diese Weise mit Sicherheit eine eventuelle Beschädigung der Kathodenschicht während des Anheizvorganges aus.

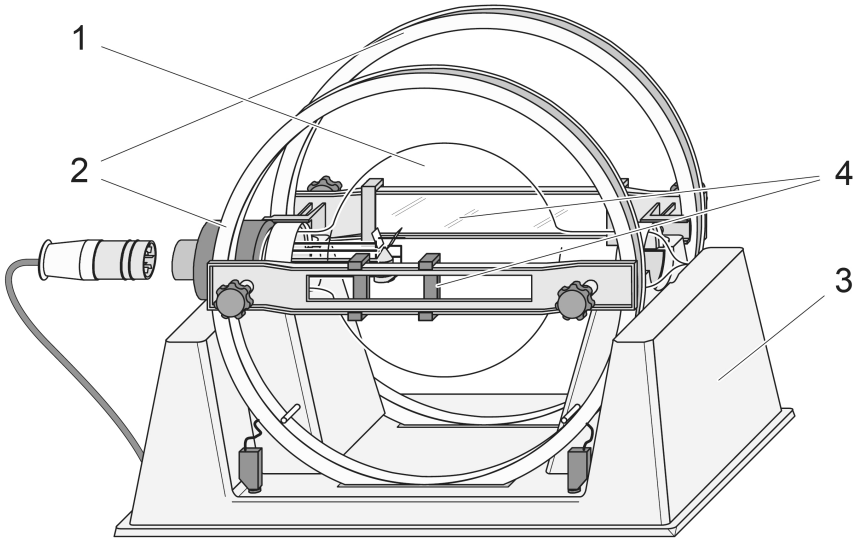


Abbildung N42.1: Fadenstrahlrohr (1) der Firma LD DIDACTIC mit Messvorrichtung (4), die auf einem Ständer (3) mit Helmholtz-Spulen (2) montiert sind.

Erst nach einer Anheizzeit von ca. 3 Minuten betätigt man die beiden Potentiometer und beobachtet nun im gut abgedunkelten Raum das Auftreten des Fadenstrahls. Während man mit dem Potentiometer (0 – 250) V die Höhe der Anodenspannung wählt, lässt sich mit Hilfe des Potentiometers (−20 – 20) V die WEHNELT-Spannung geeignet einstellen und damit Schärfe und Helligkeit des Fadenstrahls. Am Einfachsten stellt man die Fokussierung ohne angelegtes Magnetfeld ein, so dass der Elektronenstrahl auf den Glaskolben trifft und dabei das Strahlprofil leicht erkennbar ist.

Wird zwischen den einzelnen Messungen der Elektronenstrahl nicht benötigt, stellen Sie beide Potentiometer wieder auf Null. Durch diese Maßnahme wird die Lebensdauer des Fadenstrahlrohres erheblich verlängert.

Aufgabe N42.a: *Experimentelle Bestimmung der spezifischen Ladung:*

1. *Nach der Anheizzeit (3 Minuten) stellt man den Fadenstrahl geeignet ein und wählt dabei eine bestimmte Beschleunigungsspannung U.*
2. *Danach schaltet man den Strom durch die* HELMHOLTZ*-Spulen ein und beobachtet, wie der Fadenstrahl unter der Wirkung des homogenen Magnetfeldes eine Kreisbahn beschreibt.*
   Zur Bestimmung des Kreisdurchmessers gibt es eine Messvorrichtung bestehend aus einem Lineal mit zwei Schiebern und einem Spiegel zum parallaxefreien Ablesen. Verschieben Sie beim Messen den linken Schieber so, dass Innenkante, Spiegelbild und Austrittsöffnung des Elektronenstrahls auf einer Linie liegen. Den rechten Schieber verschieben Sie bis Innenkante, Spiegelbild und Fadenstrahl ebenfalls auf einer Linie liegen und lesen nun den Durchmesser als Differenz am Lineal ab.
3. *Man liest nun den bei der Beschleunigungsspannung U zur Erzeugung eines Vollkreises mit dem Radius r erforderlichen Spulenstrom I am Amperemeter ab.*

4. *Um die Wirkung des magnetischen Erdfeldes (und anderer ortsfester Störfelder) eliminieren zu können, wird – bei konstant zu haltendem Kreisradius – das Fadenstrahlrohr auf dem Drehteller horizontal um 180° gedreht und dabei der Spulenstrom I so nachgestellt, dass die Elektronen sich wieder auf einer Kreisbahn mit identischem Radius bewegen.*
5. *Mit geänderten Wertepaaren U und I, d.h. unterschiedlichen Kreisradien, wird dieser Messvorgang 10 Mal wiederholt.*

Auswertung

Aufgabe N42.b:

1. *Erweitern Sie Gleichung N42.1 um einen Zusatzterm für eine störende magnetische Flussdichte B_E. (B_S sei das durch die Spulen erzeugte Feld, B_E die Komponente des Erdmagnetfeldes in Richtung von B_S).*
2. *Eliminieren Sie B_E mit den Messungen in beiden Orientierungen des Fadenstrahlrohrs und berechnen Sie B_S aus den Spulendaten und dem Strom I.*
3. *Stellen Sie die Messdaten in einem Diagramm U gegen $(rI)^2$ dar.*
4. *Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms e/m. Geben Sie e/m in C/kg an.*
5. *Berechnen Sie die Größe von B_E in Tesla.*

Versuch N62

Linsen und Linsensysteme

Lernziel: Der praktische Umgang mit Linsen und Linsensystemen soll geübt werden. Die Näherungskonzepte der geometrischen Optik sollen für dünne Linsen, dicke Linsen und für Linsensysteme als Bildkonstruktionen durchgeführt und experimentell überprüft werden. Ein Fernrohr soll aus einfachen Linsen aufgebaut und seine Eigenschaften vermessen werden. Die Begrenzung des (Winkel-)Auflösungsvermögens durch Beugung soll analysiert werden.

Kenntnisse: Grundbegriffe und Gesetze der geometrischen Optik; Herleitung der Brechungs- und Reflexionsgesetze; Herleitung der Gaussschen und Newtonschen Abbildungsgleichungen; Definition der Brennpunkte und Hauptebenen von Linsen bzw. Linsensystemen; Strahlengang und Bildkonstruktion für dünne und dicke Linsen sowie Linsensystemen; Bestimmung von Brennweiten; Sehwinkel, Abbildungsmaßstab und Vergrößerung; Abbildungsfehler (insbesondere sphärische und chromatische Aberration); Lupe; astronomisches, terrestrisches und Galileisches Fernrohr; Beugung an einem Spalt und an einer Lochblende; Winkelauflösungsvermögen von Auge, Lupe und Fernrohr.

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik; insbes. Bergmann-Schäfer, Berkeley Kurs, Demtröder, speziell E. Hecht, Optik
Anhang A5;
Praktikumsbücher: Westphal, Walcher, Geschke

Geräte: Optische Bank, Lampe, Schirm, Reiter, Dreifachreiter, Linsen verschiedener Brennweite ($f = \pm 50\,\text{mm}, 300\,\text{mm}, 100\,\text{mm}, 50{,}2\,\text{mm}, 38\,\text{mm}, 12{,}7\,\text{mm}$ und $-12{,}5\,\text{mm}$), Kreuzblende, Lochblende ($\varnothing = 8\,\text{mm}$), Maßstab, Messskala, Siemensstern, Filterrad mit Lochblenden.

N62.1 Erläuterungen

Aus der bekannten Lage und Größe eines Gegenstandes (g, G) folgt die Lage und Größe seines Bildes (b, B) aus den beiden (Gaussschen) Abbildungsgleichungen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{und} \quad \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \gamma, \tag{N62.1}$$

wobei γ der Abbildungsmaßstab ist. Umformen von Gleichung N62.1 ergibt die Newtonsche Abbildungsgleichung:

$$(b - f)(g - f) = f^2. \tag{N62.2}$$

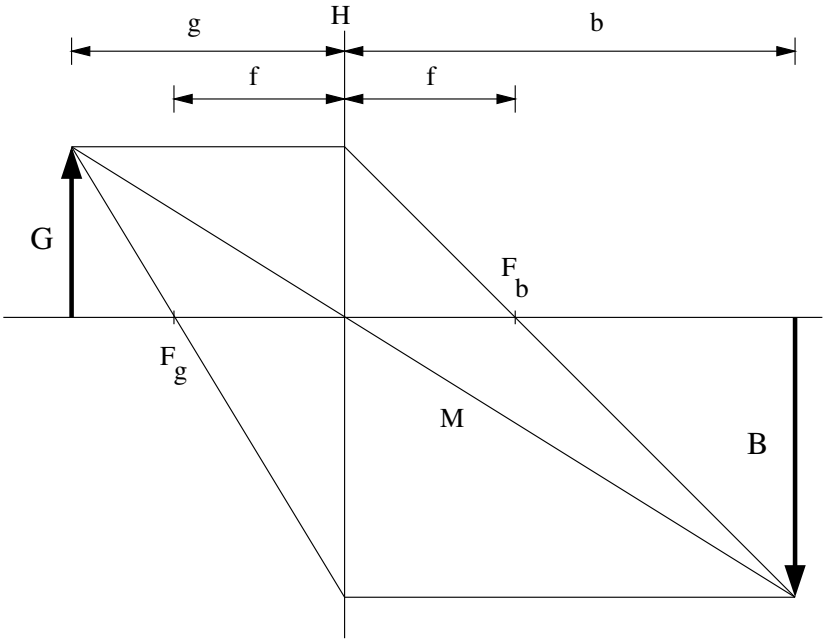


Abbildung N62.1: Bildkonstruktion an einer dünnen Sammellinse.

Aufgabe N62.A: *Beweisen Sie Gleichung N62.1 mit Hilfe von Abb. N62.1.*

Aufgabe N62.B: *Hier wird beiderseits der Linse(n) das gleiche Medium vorausgesetzt. Was wäre die Folge unterschiedlicher Medien?*

N62.1.1 Bildkonstruktion

Bei der Bildkonstruktion verfolgt man mehrere Strahlen von einem Punkt des Gegenstandes durch die abbildenden Linsen bis zu einem gemeinsamen Schnittpunkt, dem Bildpunkt. Der Durchgang der Strahlen durch die Grenzflächen einer oder oder mehrerer Linsen wird durch das Snellius-Brechungsgesetz beschrieben. Die Verfolgung vieler Strahlen wird schnell zu einer aufwendigen Aufgabe, die (heutzutage) mit Strahlverfolgungsprogrammen auf Rechnern gelöst wird. Zur vereinfachten Konstruktion kann man anstatt dieser exakten, aufwendigen Lösung die abbildende Linse bzw. das abbildende Linsensystem durch 2 Hauptebenen ersetzen, an denen die Brechung an vielen Grenzflächen zu einer Brechung pro Hauptebene für 3 Strahlen (Parallel-, Mittelpunkts- und Brennpunktstrahl) zusammengezogen wird. Die Hauptebenen sind **Hilfsmittel** zur einfachen Bildkonstruktion; sie können auch außerhalb der physischen Grenzen des Linsensystems liegen oder die bild- und gegenstandsseitige Hauptebene können sogar vertauscht sein.

Dünne Linsen: Bei dünnen Linsen liegen die beiden Hauptebenen so eng beieinander, dass man in guter Näherung nur noch eine Hauptebene[1] als brechende Ebene zu betrachten braucht. Man

[1] Im Sonderfall einer bikonvexen bzw. bikonkaven Linse mit gleichen Krümmungsradien liegt die Hauptebene in der Mittelebene der Linse.

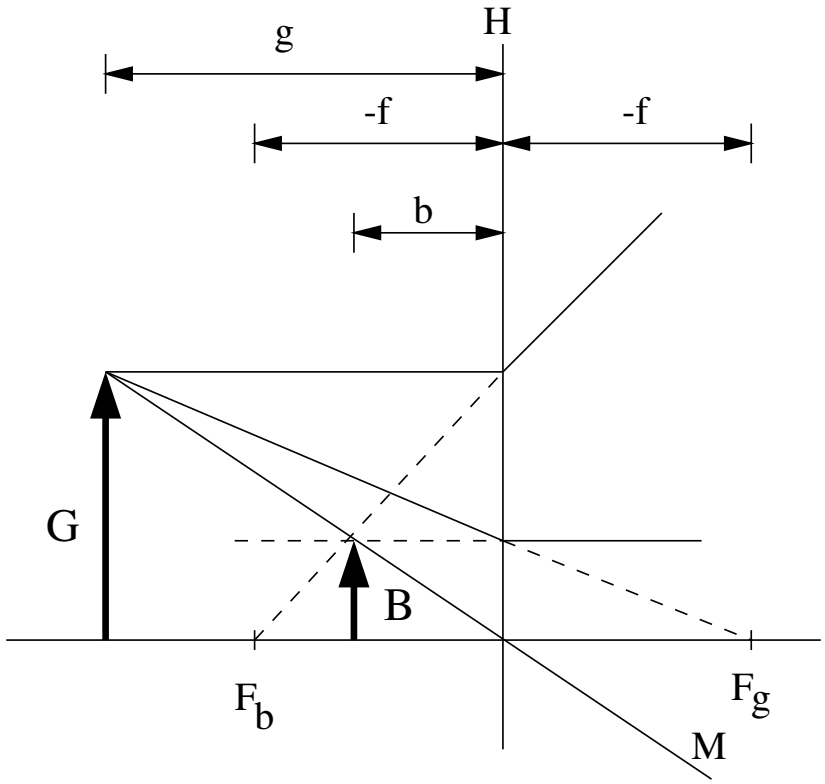


Abbildung N62.2: Bildkonstruktion an einer dünnen Zerstreuungslinse.

führt die Bildkonstruktion mit zwei Strahlen durch: Ein vom Gegenstand kommender achsenparalleler Strahl wird in der Hauptebene H so gebrochen, dass er durch den bildseitigen Brennpunkt F_b geht. Ein vom Gegenstand kommender Strahl, der durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt F_g geht, wird in H so gebrochen, dass er achsenparallel weiterläuft. Die bild- und gegenstandsseitigen Brennweiten f sind gleich. Des Weiteren existiert ein Mittelpunktsstrahl M, der Gegenstand und Bild durch den Linsenmittelpunkt geradlinig verbindet. Dort, wo sich diese Strahlen bzw. ihre Verlängerungen schneiden, entsteht ein reelles (siehe Abb. N62.1) oder ein virtuelles (siehe Abb. N62.2) Bild.

Aufgabe N62.C: *Wann entsteht bei Sammellinsen ein vergrößertes, wann ein verkleinertes Bild?*

Dicke Linsen und Linsensysteme: Hier müssen die gegenstands- und bildseitigen Hauptebenen H_g und H_b getrennt betrachtet werden (siehe Abb. N62.3. Ein vom Gegenstand kommender, achsenparalleler Strahl geht ohne Einfluss durch H_g und wird in H_b so gebrochen, dass er durch den bildseitigen Brennpunkt F_b geht. Ein vom Gegenstand durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt F_g verlaufender Strahl wird in H_g so gebrochen, dass er achsenparallel weiterläuft.

Der Abstand zwischen Brennpunkt und zugehöriger Hauptebene $[F_i, H_i]$ ist auf beiden Seiten des Systems gleich (wenn beiderseits die Medien gleiche Brechzahl n haben) und definiert die

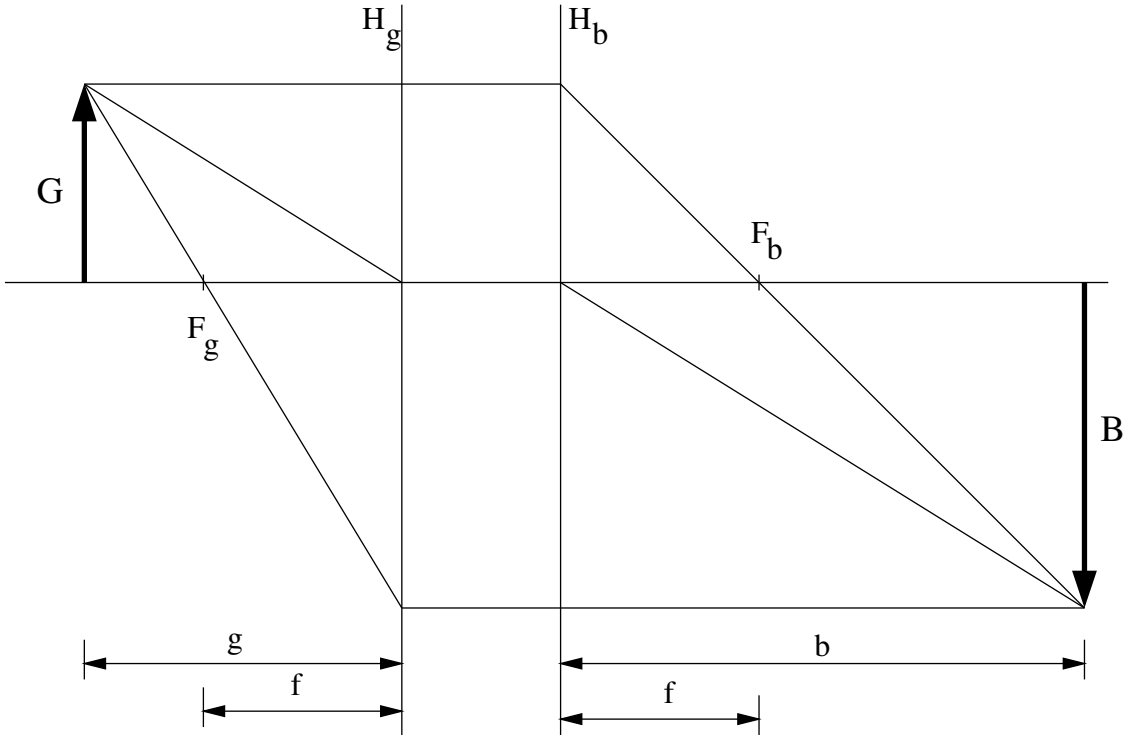


Abbildung N62.3: Bildkonstruktion an einer dicken Linse bzw. an einem Linsensystem.

Brennweite des Systems:

$$[F_g, H_g] = [F_b, H_b] = f. \tag{N62.3}$$

Versteht man unter der Gegenstandsweite g den Abstand des Gegenstands von der zugehörigen Hauptebene H_g und unter der Bildweite b den des Bildes von H_b, so gelten auch bei dicken Linsen die oben angegebenen Gaussschen Abbildungsgleichungen (Gleichung N62.1).

Zeichnerisch erhält man die Lage der Brennpunkte F_g, F_b und der Hauptebenen H_g, H_b des Linsensystems folgendermaßen:

1. Man konstruiert zunächst mit Parallel-, Brennpunkt- und Mittelpunktsstrahl das Bild B_Z des Gegenstandes G, das die Linse L_1 erzeugt. Dann mit B_Z als „neuem Gegenstand“ das Bild B, das die Linse L_2 erzeugt (siehe Abb. N62.4 als Beispiel einer Kombination von Sammel- und Zerstreuungslinse).

2. Dann werden die Brennpunkte des Linsensystems bestimmt: Der gegenstandsseitige, achsenparallele Strahl geht durch F_1' und wird in L_2 nach B hin gebrochen. Die rückwärtige Verlängerung der Strecke $\overline{L_2 B}$ schneidet die optische Achse in F_b. Der bildseitige, achsenparallele Strahl wird rückwärts in L_2 gebrochen, bestimmt durch F_2'; er wird in L_1 nach G umgelenkt und schneidet die optische Achse in F_g. Damit hat man F_g und F_b bestimmt.

3. Schließlich entnimmt man der Zeichnung, in welchem Punkt sich der vom Gegenstand G ausgehende, achsenparallele Strahl in der Verlängerung mit dem bildseitigen, verlängerten

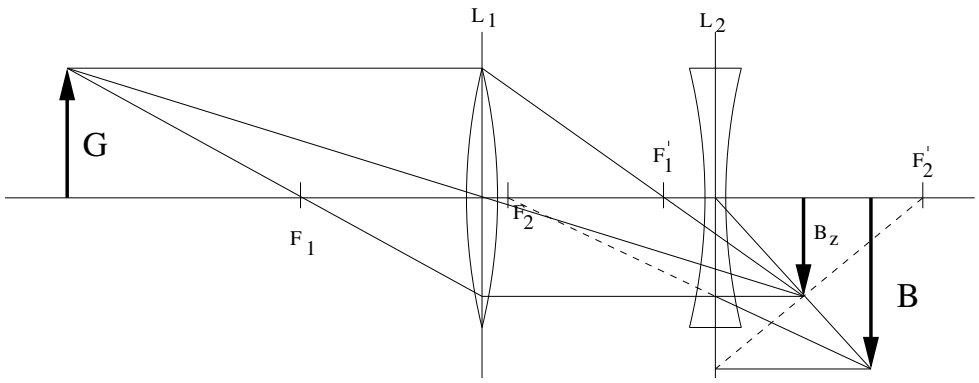


Abbildung N62.4: Erster Schritt: Bildkonstruktion an einem Linsensystem.

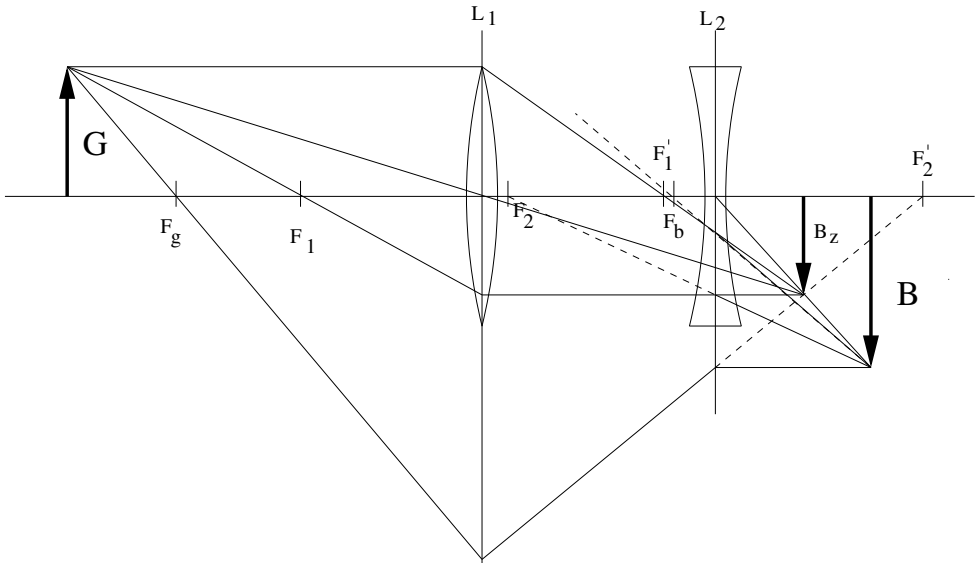


Abbildung N62.5: Zweiter Schritt: Konstruktion der Systembrennpunkte.

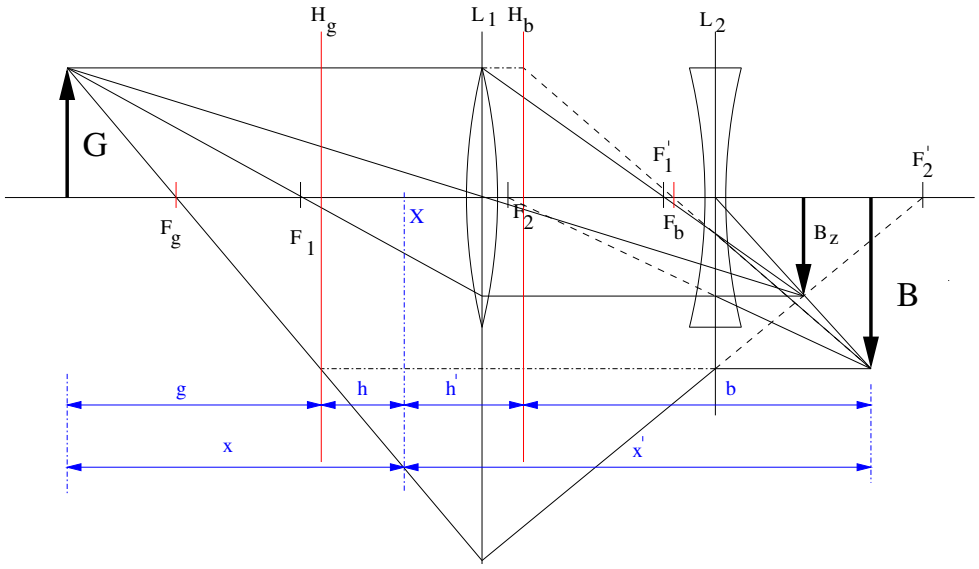


Abbildung N62.6: Dritter Schritt: Konstruktion der Hauptebenen.

System-Brennstrahl schneidet. Dieser Punkt liegt in der Ebene H_b. Man findet H_g, indem man von B aus den achsenparallelen Strahl rückwärts verfolgt und sinngemäß wie bei H_b verfährt (vgl. Abb. N62.3 und N62.6).

N62.1.2 Bestimmung der Brennweite und Hauptebenen

Experimentell geht man nach Abbe folgendermaßen vor: Der Abbildungsmaßstab γ wird sowohl als Funktion der Entfernung des Gegenstandes x als auch des Bildes x' von einem beliebig wählbaren, aber festen Bezugspunkt am Linsensystem gemessen. Die Entfernung der gegenstandsseitigen Hauptebene vom Bezugspunkt sei h, die der bildseitigen Hauptebene vom Bezugspunkt sei h'. Dann gilt (siehe Abb. N62.6):

$$x = g + h \quad \text{und} \quad x' = b + h'. \tag{N62.4}$$

Aus den beiden Gaussschen Abbildungsgleichungen (Gleichung N62.1) folgt:

$$g = f(1 + 1/\gamma) \quad \text{und} \quad b = f(1 + \gamma), \tag{N62.5}$$

$$x = f(1 + 1/\gamma) + h \quad \text{und} \quad x' = f(1 + \gamma) + h'. \tag{N62.6}$$

Auf Millimeterpapier wird x als Funktion von $(1 + 1/\gamma)$ und x' als Funktion von $(1 + \gamma)$ dargestellt. Dann ergeben sich f, h und h' aus Steigung und Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden.

N62.1.3 Abbildungsfehler

Außer den Abbildungsgleichungen (Gleichungen N62.1 und N62.2) gibt es noch die Linsengleichung, die Krümmungsradien, Brechungsindex und Brennweite sphärisch geschliffener Linsen verknüpft:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \tag{N62.7}$$

bei einer symmetrischen Linse gilt $r_2 = -r_1$. Die Abbildungsgleichungen sind Näherungen. Sie gelten nur, falls folgende Bedingungen an Form und Ausleuchtung der Linse(n) eingehalten werden:

1. Die Dicke der Linsen muss klein sein im Vergleich zu r_1 und r_2.
2. Lichtbündel, die vom Gegenstand auf die Linse einfallen, dürfen diese nur in einem Abstand von der optischen Achse durchsetzen, der klein ist im Vergleich zu den Krümmungsradien der die Linse begrenzenden Kugelflächen.
3. Die Lichtbündel dürfen mit der optischen Achse nur Winkel Θ einschließen, für die die Näherung $\sin\Theta \approx \tan\Theta \approx \Theta$ zulässig ist.
4. Die Brechzahl n hängt nicht von der Farbe des Lichtes (Dispersion) ab.
5. Das vom Gegenstand ausgehende Lichtbündel wird nicht durch Blenden auf der Gegenstands- oder Bildseite begrenzt.

Bei realen optischen Instrumenten sind diese Bedingungen in der Regel mehr oder weniger verletzt, sodass Abweichungen von der Abbildungs- oder Linsengleichung auftreten. Diese Abweichungen bezeichnet man als „Abbildungsfehler“ (Aberrationen). Unter „Linsenfehlern“ werden dagegen technisch bedingte Abweichungen von der Ideallinse verstanden, wie z.B. Abweichungen der Krümmung von der Wunschform oder Inhomogenitäten der Brechzahl innerhalb der Linse. Abbildungsfehler unterteilt man in die Klassen Schärfe- (1-3), Lage- (4,5) und Farbfehler (6):

1. Sphärische Aberration (Öffnungsfehler)
2. Koma (Asymmetriefehler)
3. Astigmatismus (Punktlosigkeit)
4. Bildfeldwölbung
5. Verzeichnung
6. Chromatische Aberration

Zwei dieser Fehler sollen hier genauer erläutert werden.

Sphärische Aberration: Bei der Ableitung der Abbildungsgleichung (Gleichung N62.1) wird angenommen, dass achsenparallele Strahlen durch die Linse auf einen Brennpunkt fokussiert werden. Dies ist jedoch nur näherungsweise für Strahlen erfüllt, deren Abstand von der optischen Achse klein ist im Vergleich zum Krümmungsradius der Linse. Diese Näherung ist umso schlechter, je größer die genutzte Linsenöffnung und je kleiner der Krümmungsradius ist. Bei genauer Konstruktion unter Beachtung des Brechungsgesetzes erhält man für die „Randstrahlen“ eines achsenparallelen Bündels eine Brennweite f_R, die geringer ist als die für „Mittelstrahlen“ f_M. Man nennt den Abstand zwischen den Brennpunkten F_M und F_R die „sphärische Aberration“ oder den „Öffnungsfehler“.

Chromatische Aberration: Aus der Linsengleichung (Gleichung N62.7) geht hervor, dass die Brennweite f einer Linse von der Brechzahl n abhängt, die ihrerseits eine Funktion der Frequenz (Wellenlänge; Farbe) des Lichtes ist. Dies führt dazu, dass die Brennweite einer Linse für verschiedene Farben unterschiedlich ist. Eine einfache Linse, die mit weißem Licht beleuchtet wird, erzeugt daher von einem Gegenstand ein unscharfes Bild mit Farbrändern. Die Brennweite variiert gemäß $\Delta f/f = \Delta n/(n-1)$.

Aufgabe N62.D: *Gegeben sei eine symmetrische, bikonvexe, sphärische Linse aus einem Glas mit* $n = 1,5$ *und einer Brennweite* $f = 5\,\mathrm{cm}$. *Wie groß sind die Krümmungsradien?*

Aufgabe N62.E: *Gegeben sei ein System aus zwei dünnen Linsen mit Brennweiten* $f_1 = 5\,\mathrm{cm}$ *und* $f_2 = -5\,\mathrm{cm}$ *im Abstand* $d = 5\,\mathrm{cm}$. *Konstruieren Sie auf Millimeterpapier im Maßstab 1:1 die Lage der Hauptebenen und Brennpunkte.*

Aufgabe N62.F: *Gegeben sei eine Linse der Brennweite* $f = 5\,\mathrm{cm}$. *Mit dieser Linse wird der Faden einer Glühbirne auf eine Wand scharf abgebildet, die in 5 m Abstand von der Linse steht. Wie weit ist der Glühfaden vom Brennpunkt der Linse entfernt?*

N62.1.4 Fernrohr

Das Fernrohr ist ein optisches Hilfmittel, mit dem ein Gegenstand dem Betrachter größer erscheint, als er ihn ohne Hilfsmittel sehen würde. Ein Gegenstand der Größe G in der Gegenstandsweite g erscheine als Bild auf der Netzhaut des Auges in der Größe B im Abstand b von der Augenlinse. Es gilt die Gausssche Abbildungsgleichung, die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\frac{G}{g} = \frac{B}{b} \equiv \tan\alpha. \tag{N62.8}$$

Ein Fernrohr vergrößert also den Sehwinkel, α, und damit die Bildgröße, B, sodass feinere Einzelheiten des Gegenstandes erkannt werden können.

Als **Vergrößerung** V eines optischen Instrumentes wird das Verhältnis der Tangens des Sehwinkels mit und ohne Instrument bezeichnet:

$$V \equiv \frac{\tan(\text{Sehwinkel mit Instrument})}{\tan(\text{maximal möglicher Sehwinkel ohne Instrument})}, \tag{N62.9}$$

wobei maximal möglicher Sehwinkel bedeutet, dass der Gegenstand aus einer Entfernung betrachtet wird, welche die deutlichen Sehweite $s_0 \approx 25\,\text{cm}$ des menschlichen Auges nicht unterschreitet.

Als **Abbildungsmaßstab** γ wird das Verhältnis aus Bild- und Gegenstandsgröße bezeichnet:

$$\gamma \equiv \frac{B}{G}. \tag{N62.10}$$

Der Abbildungsmaßstab beruht auf Längenmessung und kann nur bei einem reellen, zugänglichen Bild gemessen werden. Die Vergrößerung beruht auf Winkelmessung und kann daher sowohl bei reellen als auch virtuellen Bildern bestimmt werden.

In Lehrbüchern der Optik sowie in Anhang A5 werden optische Instrumente detailliert beschrieben und Ableitungen der Gleichungen N62.11 und N62.12 angegeben, die Sie beherrschen sollten. Daher im Folgenden nur eine knappe Zusamenfassung.

Lupe Eine Lupe ist eine Sammellinse der Brennweite f_L, durch die ein Gegenstand betrachtet wird. Je nach der Geometrie des Aufbaus (= relative Lage von Auge, Linse und Gegenstand) erscheint das virtuelle Bild des Gegenstandes in unendlicher oder endlicher Entfernung; es darf aber nicht näher als die deutliche Sehweite s_0 an das Auge rücken. Die Vergrößerung der Lupe V_L variiert entsprechend

$$V_\text{L} = \left.\frac{s_0}{f_\text{L}}\right|_\text{fern} \longrightarrow \left.\frac{s_0}{f_\text{L}} + 1\right|_\text{nah}. \tag{N62.11}$$

Die Lupe wird auch als Leseglas oder „einfaches Mikroskop“ bezeichnet.

Fernrohr Im einfachsten Fall besteht ein Fernrohr aus zwei Sammellinsen. Das Objektiv erzeugt ein reelles Bild des Gegenstands zwischen den Linsen (Zwischenbild), das mit dem Okular als Lupe betrachtet wird, wobei das Okular so justiert wird, dass das Zwischenbild in seiner Brennebene liegt. In der Ebene des Zwischenbildes kann man Markierungen wie Fadenkreuz, Skalen oder Strichplatten anbringen oder seitlich einspiegeln, die für den Betrachter

gleich scharf wie der Gegenstand erscheinen und so quantitative Messungen und Ausrichtung ermöglichen.

Astronomisches Fernrohr Die Gegenstände (= Sterne), die in der Astronomie mit Fernrohren beobachtet werden, liegen für alle praktischen Zwecke in der Entfernung „unendlich", d.h. das Zwischenbild entsteht in der Brennebene des Objektivs. Die Vergrößerung beträgt

$$V_{\mathrm{F}} = \frac{\frac{B_Z}{f_{\mathrm{oku}}}}{\frac{B_Z}{f_{\mathrm{obj}}}} = \frac{f_{\mathrm{obj}}}{f_{\mathrm{oku}}}. \tag{N62.12}$$

Als „punktförmige" Gegenstände erzeugen Einzelsterne auch punktförmige Bilder. Eine Vergrößerung zielt daher nicht auf den Einzelstern sondern auf Sternbilder oder allgemeiner auf Winkelabstände zwischen den Sternen ab.

Aufgabe N62.G: *Berechnen Sie die Gesamtbrennweite f_F und die Gesamtbrechkraft eines auf unendlich justierten astronomischen Fernrohrs.*

N62.1.5 Auflösungsvermögen

Jedes physikalische Messgerät hat eine begrenzte Messgenauigkeit bzw. ein endliches Auflösungsvermögen. In der Optik kennt man u.a. das lineare Auflösungsvermögen eines Mikroskops, das Winkelauflösungsvermögen eines Fernrohrs oder einer Linse und das spektrale Auflösungsvermögen eines Spektralapparates. Ursache des endlichen Auflösungsvermögens ist in all diesen Fällen die Beugung.

Machen Sie sich mit der Beugung am eindimensionalen Einzelspalt und an zweidimensionalen Öffnungen wie Rechteck- und Rundspalt vertraut.

In der rechtwinkligen Geometrie des unendlich langen Einzelspalts wird die Intensitätsverteilung der Beugungsfigur durch trigonometrische Funktionen in einer Raumrichtung beschrieben. Bei einem Spalt endlicher Länge (= Rechteckspalt) treten Produkte dieser Funktionen in zwei Raumrichtungen auf, was eine „rasterförmige" Beugungsfigur in der Fläche erzeugt. In der Zylindergeometrie eines kreisförmigen Spaltes werden die trigonometrischen Funktionen durch Besselfunktionen ersetzt, die eine radiale Beugungsfigur beschreiben (konzentrische Ringe).

Zwei punktförmige Lichtquellen (z.B. Sterne) erzeugen in der Beobachtungsebene hinter einem Linar- oder Rundspalt zwei Beugungsfiguren. Diese Lichtquellen werden noch als „getrennt" wahrgenommen, wenn das zentrale Maximum der einen Beugungsfigur in das erste Minimum der anderen Beugungsfigur fällt. Diese Bedingung definiert das **Winkelauflösungsvermögen** bzw. über die abbildende Linse das **lineare Auflösungsvermögen**. Im Fall des linearen Spaltes ist die Intensitätsverteilung der Beugungsfigur proportional zu $\sin^2(q)$; dann liegt das erste Minimum bei $q = \pi = 3.1416$. Im Fall des Kreisspalts ist die Intensitätsverteilung proportional zum Quadrat der Besselfunktion 1. Ordnung, die das erste Minimum bei $q = 3.8317$ hat. Für beide Spaltarten ist $q = q(\alpha) = \pi \cdot (D/\lambda) \sin\alpha$ eine Funktion des Richtungswinkels α. Das Symbol D steht für die Breite des Linearspalts bzw. den Durchmesser des Rundspalts. Im Fall des Linearspalts gilt für die

Richtung des ersten Minimum: $\pi \equiv \pi \cdot (D/\lambda) \sin\alpha_1$, d.h. $\sin\alpha_1 = \lambda/D$. Im Fall des Rundspalts gilt $3.8317 \equiv \pi \cdot (D/\lambda) \sin\alpha_1$, d.h. $\sin\alpha_1 = 1.22\lambda/D$.

Diese Relationen sind von der Wellenlänge λ des verwendeten Lichtes abhängig. Bei Verwendung von weißem Licht und Beobachtung mit dem Auge misst man das Auflösungsvermögen bei einer „effektive Wellenlänge“. Das ist eine mit der Wahrnehmungsfunktion des Auges gewichtete mittlere Wellenlänge, die hauptsächlich etwas über das Beobachtungsinstrument (Auge) aussagt.

N62.2 Versuchsdurchführung

N62.2.1 Linsen und Linsensysteme

Aufgabe N62.a: *Die Brennweiten und Hauptebenen eines Linsensystems aus Sammel- und Zerstreuungslinse sollen aus Messungen bestimmt werden.*

Zwei Linsen mit $f_1 = 5\,\text{cm}$ und $f_2 = -5\,\text{cm}$ werden im Abstand $d = 5\,\text{cm}$ auf einem Dreifachreiter befestigt. Die Sammellinse soll dem Gegenstand (Kreuzblende) zugekehrt sein. Zwischen die beiden Linsen wird eine Aperturblende zur Verkleinerung des Öffnungsfehlers eingesetzt. Verschieben Sie den Reiter mit dem Linsensystem so, dass Sie eine scharfe Abbildung des Gegenstandes erhalten. Als Bezugspunkt P kann z.B. die Markierung auf dem Reiter genommen werden. Bestimmen Sie die Lagen der Brennpunkte und Hauptebenen nach dem Abbeschen *Verfahren. Für beide Kurven sind je 10 Messpunkte aufzunehmen.*

Aufgabe N62.b: *Zeichnen Sie die experimentell gefundenen Positionen der Hauptebenen und Brennpunkte in Ihre Konstruktionszeichnung aus Aufgabe N62.E ein. Diskutieren Sie Ursachen für eventuelle Abweichungen außerhalb der Messfehler.*

Aufgabe N62.c: *Vergleichen Sie die gemessene Brennweite des Linsensystems mit dem nach folgender Formel berechneten Wert:*

$$\frac{1}{f_{gesamt}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \tag{N62.13}$$

N62.2.2 Fernrohr

Für den Versuchsteil Fernrohr steht ein kleiner optischer Tisch zur Verfügung (Abb. N62.7). Als Objektiv dient eine langbrennweitige Sammellinse ($f = 300\,\text{mm}$), und für das Okular gibt es verschiedene Linseneinsätze ($f = 38\,\text{mm}, 50{,}2\,\text{mm}, -12{,}5\,\text{mm}$ und $12{,}7\,\text{mm}$), die auf die Stangen gesetzt werden können. Hiermit lassen sich verschiedene Vergrößerungen realisieren.

Die **Vergrößerung eines Fernrohrs** wird folgendermaßen bestimmt: Betrachten Sie unter möglichst großem Abstand eine Messlatte, und zwar mit einem Auge durch das Fernrohr, gleichzeitig mit dem anderen am Fernrohr vorbei. Bringen Sie die beiden Netzhautbilder zur Deckung (dies geschieht in Ihrem Gehirn). N Teilstriche auf der Messlatte, betrachtet mit dem „unbewaffneten“ Auge, entsprechen dann M Teilstrichen auf dem durchs Fernrohr betrachteten Messlattenausschnitt und es ist $V = N/M$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus den Brennweiten berechneten Wert.

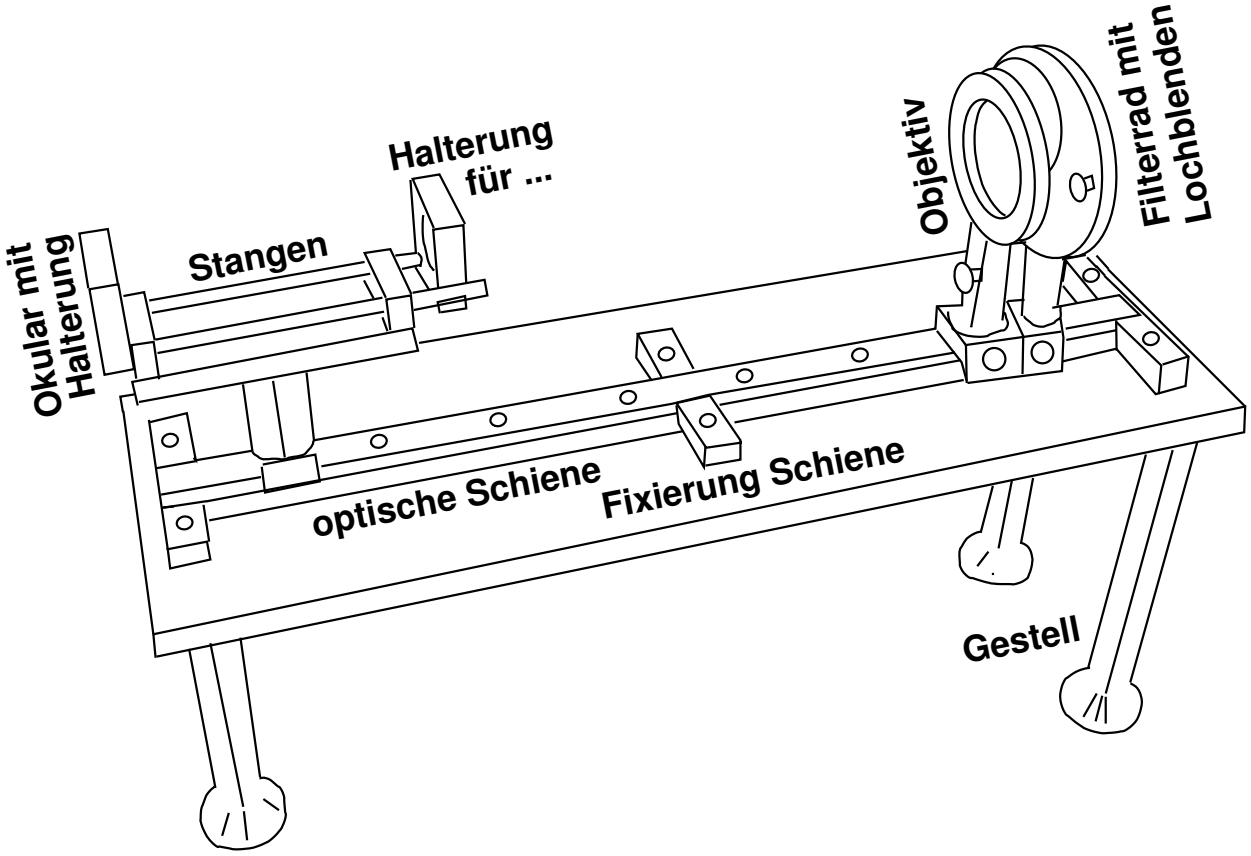


Abbildung N62.7: Optischer Tisch für Messungen mit Fernrohr.

Geben Sie eine Fehlerabschätzung und diskutieren Sie die möglichen Ursachen für eine Abweichung.

Aufgabe N62.d: *Bauen Sie auf der optischen Bank aus 2 Sammellinsen geeigneter Brennweite ein astronomisches Fernrohr mit mind. 6-facher Vergrößerung auf. Messen Sie die Vergrößerung nach dem oben beschriebenen Verfahren. Beobachten Sie den Rand des Sichtfeldes. Wodurch wird er begrenzt?*

Frage: *Wo müssten Sie eine Blende einbauen, um einen möglichst scharf umrissenen Rand zu erzeugen?*

Aufgabe N62.e: *Eine 6-fache Vergrößerung ist für ein in der Hand gehaltenes Fernrohr normal. Sie haben aber einen festen Aufbau vor sich; somit können Sie auch Fernrohre mit stärkeren Vergrößerungen aufbauen.*
Setzen Sie nun die anderen Okularsammellinsen der Reihe nach ein. Justieren Sie erneut. Messen Sie jeweils die Vergrößerung.

Aufgabe N62.f: *Setzen Sie in die Zwischenbildebene eine Messskala ein. Bestimmen Sie die Größe des Zwischenbildes der Messlatte. Setzen Sie die Zwischenbildgröße in Beziehung zur Vergrößerung.*

N62.2.3 Messung des Auflösungsvermögens von Linsen

Als „Linse“ dient das Objektiv des Fernrohrs. Der ausgenutzte Durchmesser der Linse kann durch vorgesetzte Lochblenden, die in einem Filterrad montiert sind, verändert werden. Folgende Lochdurchmesser stehen zur Verfügung: 0,2 mm, 0,3 mm, 0,6 mm, 1 mm, 2 mm und 3 mm. Da der Kontrast bei der Verwendung der Lochblenden stark abnimmt, bauen Sie am Besten ein astronomisches Fernrohr mit kleiner Vergrößerung auf und arbeiten im verdunkelten Raum.

Frage: Ist das Auflösungsvermögen vom verwendeten Okular abhängig?

In der Entfernung E ($(5-7)$ m, nachmessen!) vor der Fernrohrlinse befindet sich eine beleuchtete Sektorscheibe („Siemensstern“), bestehend aus 36 Paaren schwarzer und weißer Sektoren. Beim Betrachten der Sektorscheibe durch das Fernrohr ist je nach der Größe der benutzten Blende eine unterschiedlich große, graue Kreisfläche zu erkennen, in der die schwarzen und weißen Sektoren nicht mehr aufgelöst werden können. Der Durchmesser der grauen Kreisfläche lässt sich an einer Skala leicht ablesen; hieraus folgt unmittelbar der Abstand G zweier noch auflösbarer weißer Sektoren, von Mitte weißer Streifen zu Mitte weißer Streifen gerechnet.

Aufgabe N62.g: *Überprüfen Sie experimentell die Beziehung für den kleinsten auflösbaren Sehwinkel:*

$$\alpha = 1.22\frac{\lambda}{D},$$

mit dem Blendendurchmesser D und der effektiven Lichtwellenlänge λ.

Durchführung und Auswertung: *Bestimmen Sie für alle Blendendurchmesser D den kleinsten auflösbaren Sehwinkel $\alpha = G/E$ und tragen Sie α in Abhängigkeit von $1/D$ auf Millimeterpapier auf. Passen Sie eine Gerade an und bestimmen Sie aus der Steigung der Geraden und der Streuung der Punkte die Wellenlänge und den dazugehörigen Fehler (siehe Anhang A1).*

Frage: *Wie groß ist der kleinste auflösbare Winkel α des menschlichen Auges?*

Versuch N66

Prismen-Spektralapparat

Lernziel: Die Funktionsweise eines optischen Spektrometers soll gelernt und angewandt werden. Dabei soll der Brechungsindex und das Auflösungsvermögen eines Glasprismas gemessen werden. Anhand eines gemessenen Spektrums ist ein unbekanntes Element zu bestimmen.

Kenntnisse: Geometrische Optik; Aufbau des Spektrometers: Strahlengang, Brechungsindex n als Funktion der Wellenlänge (Dispersion), Spektrum, Rechnung für das Minimum der Ablenkung im Prisma, Auflösungsvermögen.

Literatur: Jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik;
spez. Hecht, Optik; Pérez, Optik; Bergmann-Schäfer, Bd. III Optik;
Praktikumsbücher: Westphal; Walcher; Geschke;
Anhang A5.

N66.1 Erläuterungen

Durchsetzt ein paralleles Strahlenbündel ein Prisma (Abb. N66.1) im Minimum der Ablenkung, so besteht zwischen dem Brechungsindex n, dem Winkel γ an der brechenden Kante und dem Ablenkwinkel δ folgende Beziehung:

$$n = \frac{\sin\dfrac{\delta+\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} \tag{N66.1}$$

Frage: Warum ist ein *parallel* einfallendes Strahlenbündel erforderlich?

Da der Strahl, der das Prisma durchsetzt, eine endliche Breite hat, tritt Beugung auf und damit ist das Auflösungsvermögen $A = \lambda/\Delta\lambda$ begrenzt (λ = Wellenlänge, $\Delta\lambda$ = Differenz der Wellenlänge zweier Linien, die gerade noch getrennt beobachtet werden). Die Beugungserscheinung kann umgerechnet werden in die Differenz der *optischen* Weglängen, die benachbarte (um $\Delta\lambda$ verschiedene) Wellenlängen beim Durchgang durch das Prisma erfahren. Das Auflösungsvermögen A hängt von der Dispersion $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ und der Basisbreite B des ausgeleuchteten Teils des Prismas ab:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right| \cdot B. \tag{N66.2}$$

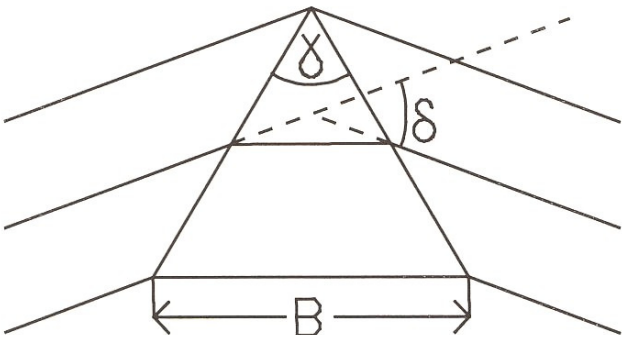


Abbildung N66.1: Kenngrößen eines Prismas: Ablenkwinkel δ, Winkel γ der brechenden Kante und Basisbreite B.

Nach Cauchy (1836) kann man den Brechungsindex über einen eingeschränkten Wellenlängenbereich bei normaler Dispersion angenähert[1] darstellen durch

$$n(\lambda) = k_0 + \frac{k_1}{\lambda^2} + \ldots \tag{N66.3}$$

N66.2 Versuchsaufbau

Der optische Teil des Spektrometers besteht aus Lichtquelle (hier Spektrallampe), Kollimator, Prisma und Fernrohr (Abb. N66.2). Von der Lichtquelle fällt das Licht durch Kollimatorspalt und Kollimatorlinse (siehe Anhang A5.8.2) parallel auf das Prisma und wird spektral zerlegt. Mit dem auf unendlich eingestellten Fernrohr werden farbige Bilder des Kollimatorspalts beobachtet. Zum mechanischen Teil des Spektrometers gehören der Skalenteller, der zweifache Nonius mit Ableselupe, die Arretierung des Fernrohrträgers und der Feintrieb zur exakten Ausrichtung des Fernrohrs.

Die **Justage** des Spektrometers beginnt beim Fernrohr: Das Okular des Fernrohrs ist so zu verschieben, dass das Fadenkreuz scharf abgebildet wird. Dann wird ein Justierkollimator auf der Objektivseite aufgesteckt und Okular und Fadenkreuz mit der Einstellschraube oben links am Fernrohr gemeinsam so verschoben, dass das kleine Loch (= Rundspalt) des Justierkollimators scharf abgebildet wird. (**Der Justierkollimator ist bereits kalibriert und darf nicht verstellt werden!**) Damit ist das Fernrohr auf unendlich eingestellt. Als nächstes wird der Kollimator des Spektrometers justiert: man blickt mit dem Fernrohr durch den Kollimator. Der Kollimatorspalt wird so lange gegen die Kollimatorlinse verschoben, bis der Spalt im Fernrohr scharf abgebildet erscheint; der Kollimatorspalt ist so zu drehen, dass er parallel zum Fadenkreuz und senkrecht zur Ablenk- bzw. Dispersionsrichtung steht. Als Lichtquelle dient eine Spektrallampe. Sie wird so vor den Kollimatorspalt gestellt, dass der Kollimator richtig ausgeleuchtet ist (siehe Anhang A5.8.2).

[1] Anmerkung: Die Begründung Cauchys für diese Formel hat sich mittlerweile als falsch erwiesen, aber die Formel ist empirisch brauchbar. Eine neuere Variante, die der Dispersionsformel bei gebundenen Elektronen besser entspricht, lautet

$$n^2(\lambda) = k_0' + \frac{k_1'}{\lambda^2} + \ldots$$

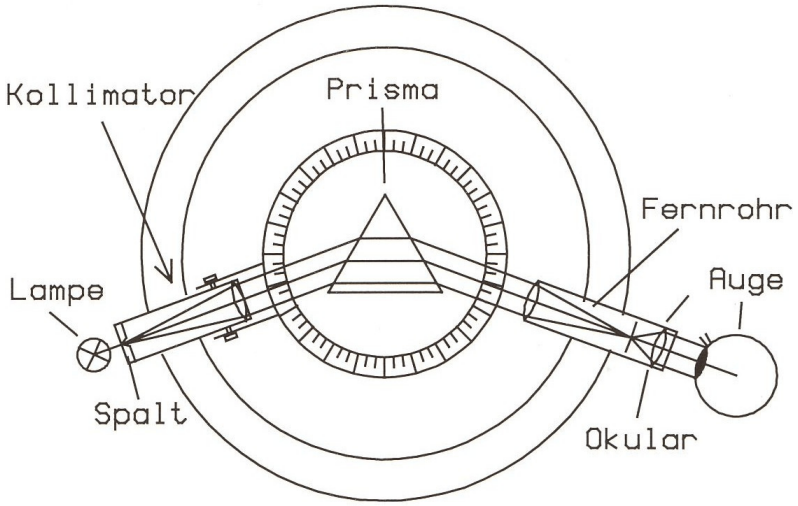


Abbildung N66.2: Aufbau Prismen-Spektralapparat

Die Spaltgröße wird mit einer Mikrometerschraube optimiert, so dass sowohl eng beieinander liegende Spektrallinien noch getrennt werden als auch die Helligkeit der Linien zur Beobachtung ausreicht.

Zum späteren **Messen** der Ablenkwinkel werden Spektrum und Fadenkreuz zunächst grob zur Deckung gebracht. Dann wird der Tragarm des Fernrohrs mit der Arretierschraube unter dem Messteller fixiert. Die Feineinstellung auf die einzelnen Linien erfolgt mit der Feinjustierschraube links unten am Fernrohrträger. Die Messscheibe trägt eine Gradeinteilung mit ½ Grad Strichabstand. Der doppelt vorhandene Nonius ist in 30 Winkelminuten unterteilt.

N66.3 Versuchsdurchführung

Achtung: Die Spektrallampen zünden nur im kalten Zustand. Nach dem Ausschalten lassen sie sich erst wieder nach ca. 15 min einschalten.

Aufgabe N66.a: *Justieren Sie den Prismen-Spektralapparat gemäß der Anleitung in Abschnitt N66.2.*

Aufgabe N66.b: *Messen Sie den Winkel γ der brechenden Kante des Prismas: richten Sie dazu die brechende Kante auf das Kollimatorrohr und messen Sie die beiden Winkel α_1 und α_2 unter denen die Reflexionsbilder links und rechts erscheinen:*

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{N66.4}$$

Aufgabe N66.c: *Zur Kalibrierung wird eine Hg/Cd-Spektrallampe verwendet. Stellen Sie für die grüne Hg-Linie das Minimum der Ablenkung ein (**warum?**) und bestimmen Sie die Ablenkwinkel aller sichtbaren Linien des Hg/Cd-Spektrums. Fertigen Sie eine Kalibrationskurve (Wellenlänge gegen Ablenkwinkel) unter Berücksichtigung Ihrer Messgenauigkeit an.*

Aufgabe N66.d: *Nehmen Sie das Spektrum eines unbekannten Elementes auf und schließen Sie mit Hilfe Ihrer Kalibrationskurve und der Spektraltabellen im Tabelle N66.1 auf das unbekannte Element.*

Aufgabe N66.e: *Berechnen Sie für 6 – 8 Linien des Hg/Cd-Spektrums den Brechungsindex nach Gleichung N66.1 und tragen Sie n gegen $1/\lambda^2$ (originale Cauchyformel, Gleichung N66.3) auf. Bestimmen Sie die Steigung k_1 und berechnen Sie daraus das Auflösungsvermögen A und die auflösbare Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ für die Wellenlängen (400, 500 und 600) nm. Prüfen Sie die Plausibilität am gelben Dublett im Hg-Spektrum.*

Tabelle N66.1: Spektren der Spektrallampen

λ [nm]	Int.	Farbe
Hg		
690,72	1	
671,62	1	
623,44	2	rot
614,95	1	
608,98	1	
603,50	1	
589,01	1	
589,44	1	
579,06	5	
576,96	5	gelb
567,72	2	
546,07	5	grün
535,40	2	
533,40	1	
512,85	2	
514,63	1	
498,06	3	
491,60	4	türkis
435,83	5	blau
434,75	2	
433,92	2	
407,78	4	
404,65	5	violett
366,33	5	uv
Cd		
738,39	2	
734,62	2	
643,85	5	
632,52	2	
611,15	1	
609,92	2	
559,88	1	
508,58	5	
479,99	5	
467,82	5	
441,46	3	

λ [nm]	Int.	Farbe
Rb		
775,77	3	
761,89	3	
740,82	1	
629,92	2	
629,83	5	
620,63	5	
615,96	3	
607,08	3	
572,45	4	
564,81	4	
557,88	2	
543,15	4	
536,26	3	
526,00	3	
519,53	2	
515,21	2	
509,53	1	
453,04	1	
421,56	5	
420,19	5	
Na		
616,08	3	
615,42	3	
589,59	5	
588,99	5	
568,82	3	
568,26	3	
567,57	1	
567,02	1	
515,36	2	
514,91	2	
498,28	2	
466,86	2	
466,49	2	
449,77	1	
449,43	1	

λ [nm]	Int.	Farbe
Zn		
747,88	1	
726,42	1	
692,83	1	
636,23	5	
623,80	1	
621,46	2	
611,16	2	
610,26	1	
602,13	1	
589,44	2	
577,71	2	
558,52	1	
530,86	1	
518,20	4	
481,05	5	
472,22	5	
468,01	5	
462,98	1	
429,83	1	
429,29	1	
405,77	2	
Tl		
707,39	1	
696,64	2	
696,05	2	
671,37	1	
655,26	3	
654,98	3	
594,90	1	
552,79	2	
548,88	1	
535,05	5	
434,05	1	
427,50	1	
422,31	1	
379,79	3	

λ [nm]	Int.	Farbe
Ca		
722,85	1	
697,33	4	
687,04	3	
672,33	5	
662,86	3	
658,55	3	
638,69	3	
621,29	5	
612,86	2	
603,41	3	
601,03	4	
584,47	4	
556,30	2	
541,97	3	
540,28	3	
537,10	1	
535,85	3	
534,89	3	
530,66	2	
527,40	2	
524,90	2	
522,70	2	
509,66	1	
459,32	5	
455,54	4	

Intensitätsskala: 1 = sehr schwach; 2 = schwach; 3 = mittel; 4 = stark; 5 = sehr stark

Versuch N70

Polarisation von Licht

Lernziel: Es soll die Wechselwirkung von polarisiertem Licht mit Materie untersucht und damit der Zugang zu Anwendungen wie Polarimetrie, LCD-Displays oder der Spannungsoptik zur Materialuntersuchung eröffnet werden.

Kenntnisse: Geometrische Optik; Wellenoptik (Wellenfront, Feldstärke, Intensität...); Messung von Lichtintensitäten (Photodiode); Interferenzfilter; Kantenfilter; Polarisiertes Licht (lineare, zirkulare und elliptische Polarisation, Polarisationsgrad...); Cauchy-Formel; Strahlungscharakteristik eines Hertzschen Dipols; Erzeugung polarisierten Lichts (Reflexionspolarisation, Doppelbrechung, Polaroisfolie, Dichroismus...); natürliche und induzierte optische Aktivität (Quarz, Zucker, Spannungsdoppelbrechung);

Literatur: Hecht, Optik; Bergmann-Schäfer Bd. 3, Optik; R. W. Pohl: Einführung in die Optik; D. Meschede: Optik, Licht und Laser; Praktikumslehrbücher: Walcher, Geschke, Westphal

Geräte: Optische Bank, 6 Optikreiter, Halogenlampe mit integriertem Infrarot-Kantenfilter, 2 Polarisatoren, 1 Halbschattenpolarisator, Filterrad mit 7 Bandpassfiltern (10 nm Halbwertsbreite, zentrale Wellenlängen: (430, 458, 488, 520, 568, 620 und 694) nm), Quartz-Polarisationspräparat (4 mm Dicke), 6 Rundküvetten (10 cm Länge) mit Fruktoselösungen, Linse (f = 100 mm), Sichtschirm, Silizium-Photodiode mit Messverstärker und Multimeter

N70.1 Erläuterungen

N70.1.1 Polarisationszustand

Eine elektromagnetische (e/m) Welle ist eine raum-zeit-periodische Schwingung von gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern. Wenn der elektrische Feldstärkevektor in einer Ebene schwingt, ist die Welle **linear polarisiert**. Diese Ebene heißt Polarisationsebene der Welle. Der **Polarisationsgrad** PG eines aus einer großen Zahl von Einzelwellen bestehenden Lichtstrahls ist definiert als:

$$PG = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}}, \tag{N70.1}$$

wobei $I_{\parallel}$ die Lichtintensität parallel zu einer ausgezeichneten Polarisationsebene und $I_{\perp}$ senkrecht dazu bezeichnet. Wenn die Polarisation der Einzelwellen homogen im Raum verteilt ist, dann

ist der Strahl unpolarisiert ($PG = 0$). Sind alle Wellen gleich ausgerichtet, dann ist der Strahl vollständig polarisiert ($PG = 1$).

Eine e/m Welle heißt **elliptisch polarisiert**, wenn der elektrische Feldstärkevektor um die Ausbreitungsrichtung rotiert. Sie heißt **zirkular polarisiert**, wenn der Betrag des Feldstärkevektors konstant bleibt. Rotiert der Feldstärkevektor im mathematisch positiven Sinn, nennt man die Welle rechtselliptisch bzw. rechtszirkular polarisiert. Eine linear polarisierte Welle kann man als Überlagerung einer links- mit einer rechtszirkular polarisierten Welle mit fester Phasenbeziehung zwischen beiden Wellen auffassen. Dementsprechend kann man eine zirkular bzw. elliptisch polarisierte Welle als Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen darstellen.

Aufgabe N70.A: *Konstruieren Sie aus zwei linear polarisierten Wellen gleicher Frequenz und Amplitude mit relativen Phasenverschiebungen von 0°, 45°, 90° und 180° die Polarisation der überlagerten Welle als Lissajous-Figur.*

N70.1.2 Wechselwirkung elektromagnetischer Wellen mit Materie

In einfacher Näherung besteht Materie aus einem schweren Kern an den ein leichtes Elektron gebunden ist. Das elektrische Feld einer e/m Welle kann das Elektron in eine erzwungene Schwingung versetzen, d.h. Ladung wird beschleunigt und strahlt mit der Charakteristik eines Hertzschen Dipols eine e/m Welle ab. In Materie überlagern sich die ursprüngliche Welle und die Hertzschen Dipolwellen zu einer neuen Welle, die sich mit verringerter Lichtgeschwindigkeit c_n im Vergleich zur Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 ausbreitet. Der Brechungsindex $n \equiv c_0/c_n$ ist ein Maß der Lichtgeschwindigkeit in Materie und kann im Bereich der **normalen Dispersion** als Funktion der Wellenlänge λ durch die empirische Cauchy-Formel

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots \tag{N70.2}$$

beschrieben werden, wobei A und B materialabhängige Konstanten sind.

Doppelbrechung Ist ein Atom in einen Kristallverband mit unterschiedlichen Nachbarn in unterschiedlichen Richtungen eingebunden, dann kann die „Federkonstante“ des schwingfähigen Systems richtungsabhängig sein. Dies führt zu Brechungsindizes, die von der Ausbreitungsrichtung und Polarisation des einfallenden Lichts abhängen. Dabei wird das Licht in zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen, den „**ordentlichen**“ und den „**außerordentlichen**“ Strahl, aufgespalten. Solche anisotrope Materialen heißen doppelbrechend. Auch optisch isotrope Materialien können, z.B. durch mechanische Spannung (Spannungsdoppelbrechung), elektrische oder magnetische Felder doppelbrechend werden.

Rotationsdispersion (optische Aktivität) Bei schraubenförmig aufgebauten Kristallen (z.B. Quarz) oder Molekülen (z.B. Zucker) denkt man sich eine einfallende linear polarisierte Welle in rechts- und linkszirkulare Wellen zerlegt, welche in der Schraubenstruktur der Materie unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten haben. Nach Durchgang der e/m Welle durch Materie ändert sich die Phasendifferenz der beiden Wellen, so dass bei ihrer Überlagerung am Ende

ein neuer Polarisationszustand entsteht (siehe Aufgabe N70.A). Da die Rotationsdispersion auf den unterschiedlichen Brechungsindizes für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl beruht, kann diese durch die mit Gleichung N70.2 verwandte Biotsche-Formel:

$$\varphi - \varphi_0 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots \tag{N70.3}$$

beschrieben werden, wobei A und B materialabhängige Konstanten sind.

Gitterpolarisation Trifft eine e/m Welle auf ein Gitter aus leitenden Stäben, so erzeugt die Komponente des elektrischen Feldes parallel zu den Gitterstäben in den Stäben Dipolschwingungen, die wiederum e/m Wellen aussenden. Die Überlagerung der erzeugten mit der einfallenden Welle führt zur Auslöschung in Vorwärtsrichtung und Reflexion in Rückwärtsrichtung. Nur der Teil der e/m Welle senkrecht zum Gitter wird transmittiert. Für den sichtbaren Wellenlängenbereich gibt es statt metallischer Gitterstäbe sogenannte Polaroidfolien, die aus langkettigen, parallel angeordneten Kohlenwasserstoffmolekülen mit eingelagertem Jod bestehen. Der Teil der einfallenden Welle, der parallel zu den Molekülketten polarisiert ist, regt die Elektronen zu Schwingungen an. Die Energie der Schwingungen wird von den Molekülen absorbiert und in Wärme umgewandelt. Die parallele Feldkomponente wird somit absorbiert während die senkrechte transmittiert wird.

Malussches Gesetz Fällt linear polarisiertes Licht (Polarisationswinkel φ_0) mit der Intensität I_0 auf einen Polarisator, so verbleibt hinter diesem nur die Projektion des elektrischen Feldstärkevektors $\vec{E}$ auf dessen Durchlassrichtung, die durch den Winkel φ gegeben ist. Für die transmittierte Intensität I gilt das Malus Gesetz:

$$I = I_0 \cos^2(\varphi - \varphi_0), \tag{N70.4}$$

Aufgabe N70.B: *Den Polarisationsgrad PG des Lichtes nach Durchgang durch einen Polarisator (Gleichung N70.1) kann man mit Hilfe eines zweiten Polarisators (Analysator) bestimmen. Geben Sie eine Formel für PG in Abhängigkeit von der maximalen (I_{max}) und minimalen (I_{min}) Intensität nach Durchgang durch Polarisator und Analysator an.*

N70.2 Versuchsdurchführung

Als Lichtquelle für alle Versuche dient eine Halogenlampe, deren infraroter Spektralanteil mit einem IR-Kantenfilter unterdrückt wird (Warum?). Mit einer Linse wird ein paralleles Strahlenbündel erzeugt, das einen Polarisator (Polaroidfolie) vollständig durchsetzt. Hinter dem Polarisator steht linear polarisiertes Licht zum Experimentieren zur Verfügung (siehe Abb. N70.1).

Als Analysator wird eine weitere, drehbar gelagerte Polaroidfolie eingesetzt. Der Rotationswinkel ist an einer Skala an der Halterung des Polarisators ablesbar. Mit einer weiteren Linse kann die Lampe bzw. die eingesetzte Optik auf einen Sichtschirm oder den Detektor (Photodiode) abgebildet werden.

Die Experimentierleuchte mit dem Objektiv (Sammellinse) kann mit einem Stab justiert werden; durch Ziehen verschiebt man die Halogenlampe entlang der optischen Achse, durch Drehen

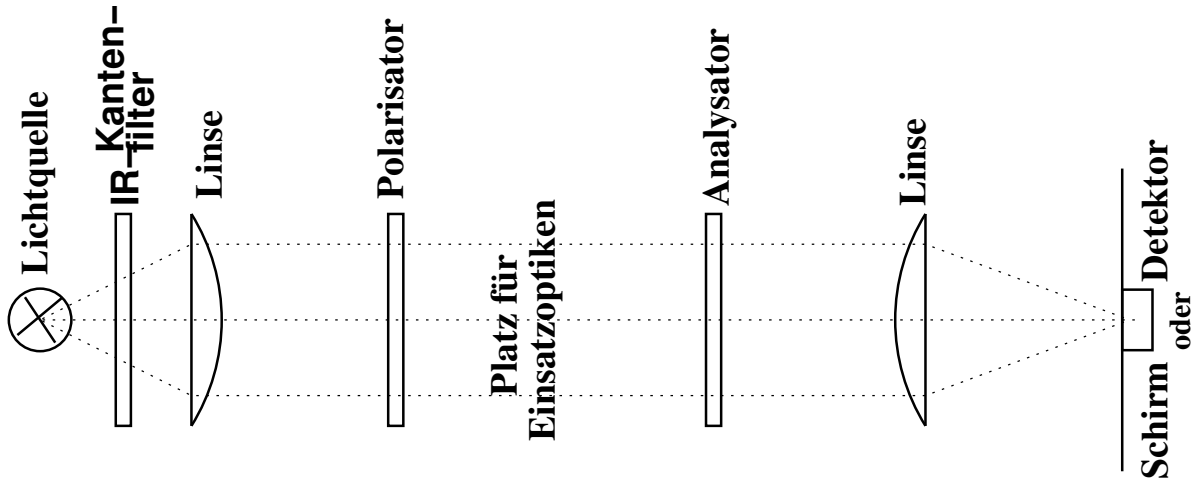


Abbildung N70.1: Versuchsaufbau für Polarisationsmessungen

senkrecht dazu. Für die Experimente ist die Leuchte so zu justieren, dass ein paralleles Lichtbündel erzeugt wird. Bilden Sie zur Kontrolle der Justage den Glühwendel auf eine „weit“ entfernte Wand scharf ab. Danach arretieren Sie den Stab mit einer Rändelschraube.

Aufgabe N70.a: *Eigenschaften von Polaroid-Polarisatoren:*

Durchführung: *Bauen Sie auf die optische Bank die Halogenlampe, zwei Polarisatoren und eine Linse, mit der Sie das Lichtes auf die Photodiode fokussieren. Die Lichtintensität wird mit einer Silizium-Photodiode gemessen. Die Photodiode wird dabei im Kurzschluss betrieben und liefert einen zur Beleuchtungsstärke proportionalen Strom, welcher über einen Transimpedanzverstärker in eine Spannung umgewandelt wird ohne die Stromquelle zu belasten. Um den Messbereich bei der Versuchsdurchführung optimal auszunutzen, stellen Sie zuerst die Verstärkung mit dem Drehpotentiometer so ein, dass bei maximaler Lichtintensität die Ausgangsspannung ca. 10 V beträgt und arretieren dann das Potentiometer. (Eine rote LED leuchtet am Verstärker auf, wenn dieser übersteuert wird – dies ist auf jeden Fall zu vermeiden!)*

Messen Sie den Dunkelstrom der Photodiode, d.h. die dazu proportionale Spannung bei vollständig abgeschatteter Photodiode. Der Polarisator wird nun auf $-90°$ gestellt und der Analysator im Bereich von $\pm 90°$ gedreht. Dann stellen Sie den Polarisator auf $90°$ und messen so im gesamten Winkelbereich von $0°$ – $360°$. Verteilen Sie die Messpunkte sinnvoll auf den Messbereich.

Auswertung: *Bestimmen Sie die Nulllage φ_0 der Winkelskala des Polarisators. Tragen Sie die um den Dunkelstrom korrigierten Intensitäten (in der Messeinheit Volt) gegen die Winkeldifferenz zwischen Polarisator und Analysator $(\varphi - \varphi_0)$ auf. Passen Sie an diese Daten eine Kurve gemäß Gleichung N70.4 an und verifizieren Sie das* Malus *Gesetz, wobei der Offset aufgrund nicht perfekt polarisierten Lichtes zu berücksichtigen ist. Bestimmen Sie aus der maximalen (I_{max}) und minimalen (I_{min}) transmittierten Intensität den Polarisationsgrad des Lichtes nach Durchgang durch einen Polarisator.*

Aufgabe N70.b: *Rotation der Polarisationsebene durch eine Quarzplatte:*

Entfernen Sie die zweite Linse und Photodiode aus dem Versuchsaufbau und drehen Sie den Analysator so, dass die transmittierte Intensität minimal wird. Setzen Sie zwischen Polarisator und Analysator eine 4 mm dicke Quarzplatte ein. Der Strahl erscheint farbig aufgehellt. Dreht man den Analysator so wird der Strahl nicht mehr dunkel sondern die Farben variieren.
Frage: *Warum hellt der Strahl auf?*
Frage: *Warum wechseln die Farben beim Drehen des Analysators?*

Durchführung: *Bestimmen Sie den Drehsinn Ihres Quarzpräparates anhand der Abfolge der Farbwechsel beim Drehen des Analysators. Für die nachfolgenden Messungen wird die Quarzplatte auf die Photodiode mit der Linse scharf abgebildet. Stellen Sie den Winkel des Analysators auf ±90°, so dass Sie einen Messbereich von 180° zur Verfügung haben. Bauen Sie das Filterrad mit einem der Interferenzfilter zwischen Lampe und Polarisator ein. Das Filterrad ist so zu montieren, dass die spiegelnden Seiten der Interferenzfilter zur Lichtquelle zeigen (Warum?). Messen Sie den Winkel φ des Minimums der Helligkeit und somit das Drehvermögen $(\varphi - \varphi_0)$ für alle 7 Bandpassfilter mit einer Messreihe aus 5 Einzelmessungen.*

Auswertung: *Bestimmen Sie aus den 5 Einzelmessungen den Mittelwert inkl. Fehler für das Drehvermögen der 7 Bandpassfilter. Tragen Sie die Drehwinkel $(\varphi - \varphi_0)$ als Funktion der inversen Zentralwellenlänge der Interferenzfilter zum Quadrat (λ^{-2}) auf. Bestimmen Sie aus den Messwerten und den dazugehörigen Fehlern eine Ausgleichsgerade mit den Parametern A und B der* Biotschen-Formel *(Gleichung N70.3). Suchen Sie aus der Literatur den Wert für das spezifische Drehvermögen von Quarz bei einer optischen Wellenlänge heraus, welches sich üblicherweise auf Platten von 1 mm Dicke bezieht. Vergleichen Sie Ihren Wert für das spezifische Drehvermögen von Quarz, den Sie aus der Ausgleichsgeraden ermitteln, mit dem Literaturwert.*

Aufgabe N70.c: *Aufbau und Anwendung eines Halbschattenpolarimeters:*

Bei der Drehung der Polarisationsebene durch eine Lösung gilt für den Drehwinkel $\varphi = \varphi_\lambda \cdot \ell c$, wobei ℓ die Länge der durchstrahlten Schicht und c die Konzentration der gelösten, optisch aktiven Substanz ist.

Bauen Sie für diesen Versuch ein Halbschattenpolarimeter auf, indem Sie einen weiteren Polarisator, der nur die Hälfte des Sichtfeldes abdeckt, zwischen Polarisator und Analysator einbauen (Warum dort?). Die Polarisationsebenen der beiden Polarisatoren werden nun leicht (ca. 10°) gegeneinander verdreht. Dieses Halbschattenpolarimeter nach Lippich *bietet ein wesentlich schärferes Einstellkriterium für den Analysator. Die Nullposition ist hier durch die identische Helligkeit in beiden Sichtfeldern definiert; gegenläufige Helligkeitsänderungen in beiden Feldern sind beobachtbar.*

Durchführung *Bauen Sie eine der Rundküvetten mit der Zuckerlösung und einen Bandpassfilter ein.*
Frage: *Welcher Filter ist beim Beobachten mit dem Auge am Geeignetsten?*

Bestimmen Sie durch Abgleich beider Sichtfelder auf identische Helligkeit die Nullstellung φ_0 des Analysators. Messen Sie nun nacheinader für alle 5 Küvetten mit den kalibrierten D(-)-Fruktoselösungen die Polarisationsdrehung φ. Bestimmen Sie nun die Drehung einer D(-)-Fruktoselösung unbekannter Konzentration. Messen Sie das Drehvermögen für alle Lösungen mit einer Messreihe aus 5 Einzelmessungen.

Auswertung *Bestimmen Sie aus den 5 Einzelmessungen den Mittelwert inkl. Fehler für das Drehvermögen der Lösungen. Tragen Sie die gemessenen Drehwinkel ($\varphi - \varphi_0$) als Funktion der Konzentration der Fruktoselösung auf. Bestimmen Sie aus den Messwerten und den dazugehörigen Fehlern eine Kalibrationsgerade und somit das spezifische Drehvermögen $[\varphi]_\lambda$ von D(-)-Fruktose. Ermitteln Sie mit Hilfe der Kalibrationsgeraden die Konzentration der unbekannten Lösung.*

Aufgabe N70.d: *Qualitative Messungen zur Spannungsoptik*

In der Spannungsoptik werden mechanische Spannungen in Kunststoffmodellen bestimmt, um Aussagen über die Belastbarkeit komplizierter Bauteile zu gewinnen. Dafür verwendet man transparente Kunststoffe, die unter mechanischer Belastung doppelbrechend werden (Spannungsdoppelbrechung). Aus Symmetriegründen liegt die optische Achse der Doppelbrechung in Richtung der Deformation (Dehnung oder Stauchung).

Durchführung: *Eine quantitative Analyse spannungsoptischer Experimente geht über den Rahmen dieses Praktikums hinaus. Sie können aber qualitative Eindrücke dieser Methode gewinnen. Bringen Sie dazu transparente Kunststoffgegenstände (z.B. CD-Hülle, Haushaltsfolie, Tesafilm, etc.) mit, die Sie zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren einbringen, drehen und deformieren. Wiederholen Sie Ihre Experimente unter Verwendung eines Bandpassfilters.*

Auswertung *Beschreiben Sie die beobachtbaren Effekte beim Einbringen der Kunststoffgegenstände zwischen die gekreuzten Polarisatoren. Was schließen Sie daraus? Was ist an Ecken und Kanten der Proben zu beobachten? Können Sie Inhomogenitäten im Material beobachten? Was erkennen Sie beim Deformieren der Probe? Verschwinden diese Effekte bei Wegnahme der mechanischen Belastung – wenn nicht, was schließen Sie daraus? Was ändert sich bei Verwendung eines Bandpassfilter im Vergleich zu weißem Licht?*

Anhang A0

Beschreibung periodischer Vorgänge

In der Natur gibt es Vorgänge, die sich im Zeit- und/oder im Ortsraum wiederholen. Beispielsweise ist die Schwingung eines (Uhren-)Pendels ein mechanischer, periodischer Vorgang im Zeitraum. Auch die Wechselspannung des Stromnetzes ist so ein Vorgang. Eine periodische Wiederholung im Ortsraum wäre z.B. die Wellplattendeckung auf Gebäuden oder die Rippel im Sand, die durch Wind- oder Meeresströmung erzeugt werden. Wellen sind Vorgänge, die sowohl im Zeit- als auch Ortsraum periodisch sind. Trifft ein Stein auf eine ruhende Wasseroberfläche, geht vom Auftreffpunkt eine kreisförmige Störung der Höhe der Wasseroberfläche aus: Misst man diese Höhe an einem festen Ort, so beobachtet man eine Schwingung in der Zeit; fotografiert man diese Störung, d.h. beobachtet das System zu einem festen Zeitpunkt, so bildet die gestörte Höhe der Wasseroberfläche einen periodischen Vorgang im Raum.

In der Physik werden diese Vorgänge quantitativ mit mathematischen Methoden beschrieben. Im einfachsten Fall nutzt man dazu die trigonometrischen Funktionen Sinus oder Kosinus. Bei diesem elementaren Zugang stellt sich schnell heraus, dass (1) die Phasenbeziehungen zwischen den verschiedenen schwingenden physikalischen Größen (z.B. Wechselstrom und -spannung) nicht „automatisch“ richtig ausgerechnet werden und (2) die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen unübersichtlich und damit fehleranfällig berechenbar sind. Ein Ausweg liegt in der Darstellung periodischer Vorgänge mit Hilfe komplexer Zahlen.

Diese Einführung wendet sich an Praktikanten, die in ihrer bisherigen schulischen und universitären Ausbildung komplexe Zahlen noch nicht kennen gelernt haben. Es gilt – wie für alle Anhänge und Versuchsanleitungen – dass diese Zusammenstellung ein Studium der Literatur[1] nicht ersetzen kann.

A0.1 Trigonometrische Funktionen

Abb. A0.1 zeigt den Werteverlauf der periodischen Funktionen Sinus und Kosinus als Funktion der **Phase** φ, wie das Argument der trigonometrischen Funktionen genannt wird. Man erkennt unmittelbar, dass mit einer Verschiebung des Arguments um $\pm\pi/2$ Sinus und Kosinus zur Deckung gebracht werden können. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man sich daher auf eine der beiden Funktionen beschränken, hier wählen wir den Kosinus:

$$W(\varphi) = A\cos\varphi. \tag{A0.1}$$

[1] z.B. H. Schulz, Physik mit dem Bleistift, 1999

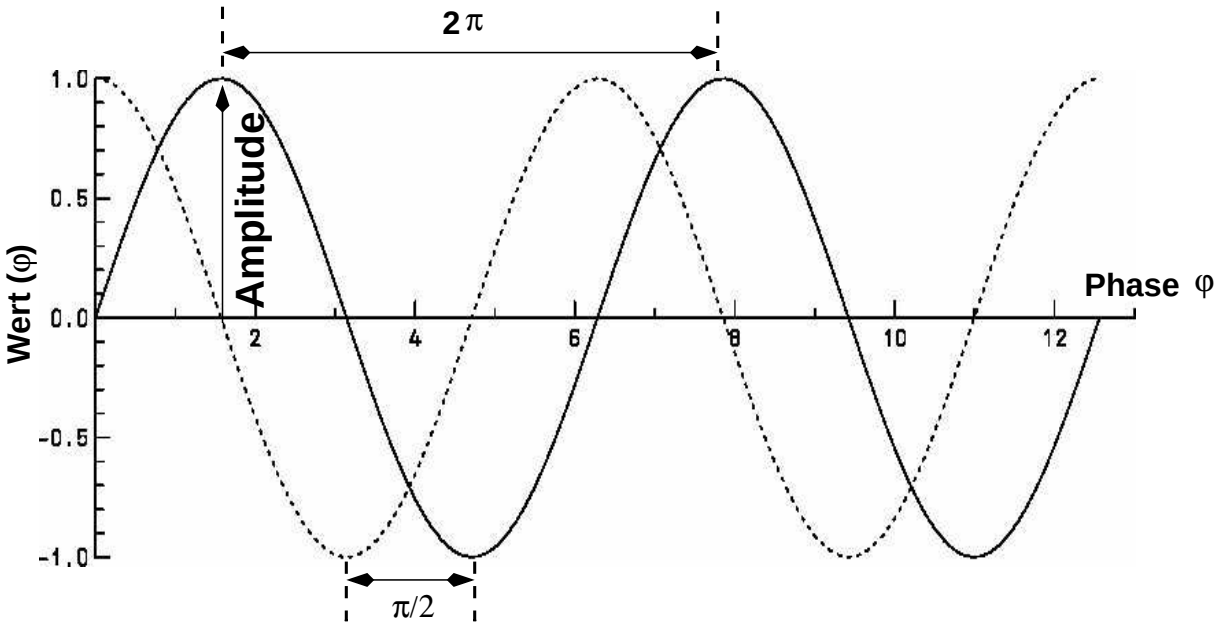
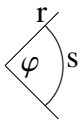


Abbildung A0.1: Darstellung von Sinus (—) und Kosinus (- - -) als Funktion der Phase.

Die **Amplitude** A quantifiziert die extremale Größe des periodischen Vorgangs und sie trägt die zugehörige physikalische Maßeinheit (z.B. Länge, Strom, ...). Die Amplitude kann sich („langsam“) ändern, wenn der periodische Vorgang sich aufschaukelt, gedämpft ist oder eine Schwebung ist. Der instantane Wert $W(\varphi)$ des Vorgangs schwankt zwischen $-A$ und $+A$. Die Phase φ hat keine physikalische Maßeinheit. In der Geometrie wird sie als Winkel im Bogenmaß verstanden:

$$\varphi \equiv \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Kreisradius}} = \frac{s}{r}. \qquad \text{(A0.2)}$$



Obwohl der Bruch s/r als Verhältnis zweier Längen keine physikalische Maßeinheit trägt, wird als „Gedächtnisstütze“ die Pseudomaßeinheit „Radiant“ (*engl.*: radian), abgekürzt „rad“ angefügt. Andere gebräuchliche Pseudomaßeinheiten für Winkel sind das „Grad“, das auf dem Sexagesimalsystem der sumerischen Kultur beruht und über mehrere tausend Jahre überliefert ist, und das „Gon“ (ursprünglich *franz.*: „grade“; *engl.*: „grad“; *deutsch*: „Neugrad“), eine im Vergleich recht junge Errungenschaft der französischen Revolution[2].

Aufgabe A0.A: *Gegeben sei ein Winkel von 1 rad. Wie groß ist sein Wert in Grad und Gon? Wieviel rad entsprechen 1 Grad bzw. 1 Gon? Geben Sie Ihre Ergebnisse mit einer relativen Genauigkeit von 1% an.*

Der Umfang eines Kreises beträgt $U = 2\pi r$. Wenn man als Bogenlänge s den Kreisumfang U einsetzt, so beträgt die Phase $\varphi = 2\pi r/r = 2\pi$, d.h. ein Umlauf um den Kreis entspricht einer Änderung der Phase um 2π und der Vorgang wiederholt sich, wie man es an Abb. A0.1 erkennen kann.

[2] Auf Taschenrechnern findet man häufig folgende, englische Terminologie: **rad** bedeutet „radian“ (Radiant), **deg** bedeutet „degree“ (Grad) und **grad** bedeutet „grad“ (Gon).

Vorgänge in der Natur werden in der Physik üblicherweise in einem Koordinatensystem aus Zeit (t) und Raum (x) gemessen. Man braucht also eine Methode, um aus (t, x) die Phase φ zu berechnen. Als „Wiederholungsmaß“ in (t, x) definiert man die **Periodendauer T** bzw. die **Wellenlänge λ**. Die Verhältnisse t/T und x/λ geben an, wo der Vorgang in der Wiederholung steht; um auf die Phase zu kommen, muss noch mit 2π multipliziert werden. Man führt die **Kreisfrequenz ω** und die **Wellenzahl k** ein:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{Kreisfrequenz} \tag{A0.3}$$

$$k = 2\pi\tilde{\nu} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{Wellenzahl} \tag{A0.4}$$

Dabei heißen $f = \nu = 1/T$ die Frequenz und $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ (unglücklicherweise ebenfalls) Wellenzahl (ob k oder $\tilde{\nu}$ gemeint ist, muss man aus dem Zusammenhang erschließen). Um die Koordinatenursprünge der Phase φ und der Zeit t bzw. des Ortes x zu entkoppeln, führt man noch die **Phasenlage φ_0** ein. Damit lauten die Transformationsgleichungen für die Phase:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \tag{A0.5}$$

$$\text{bzw.} \quad \varphi(x) = kx + \varphi_0. \tag{A0.6}$$

Eine Welle ist sowohl in der Zeit als auch im Raum periodisch. Die Phase der Welle ist die Differenz der Zeit- und Raumphasen, wobei eine neue Phasenlage φ_0 entsteht:

$$W(t, x) = W(\varphi(t) - \varphi(x)) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0). \tag{A0.7}$$

Aufgabe A0.B: *Zur Veranschaulichung einer Welle zeichnet man gern die Wellenfronten; das sind Orte gleicher Phase: $\varphi(t, x(t)) = const$. Differenzieren Sie diesen Ausdruck nach der Zeit und bestimmen Sie daraus die **Phasengeschwindigkeit**, d.h. die Geschwindigkeit, mit der sich eine feste Phase (z.B. das Maximum) der Welle im Raum ausbreitet.*

Als Beispiel eines periodischen Vorgangs sei ein Kondensator mit der Kapazität C betrachtet, der von einem Wechselstrom $I(t) = I_0 \cos\omega t$ durchflossen wird. Gesucht ist die Spannung, die über dem Kondensator abfällt. Es gilt das Ohmsche Gesetz in der Form $U = ZI$, wobei Z für den Wechselstromwiderstand (Impedanz) steht. Für einen Kondensator beträgt $Z = 1/(\omega C)$. Eingesetzt erhält man:

$$U_C(t) = \frac{I_0}{\omega C}\cos\omega t. \tag{A0.8}$$

Die Amplitude $I_0/(\omega C)$ ist richtig berechnet und es stimmt auch, dass die Spannung U_C mit der Kreisfrequenz ω variiert. Aber die Phasenlage der Spannung ist gegenüber dem Strom um $\pi/2$ verschoben, was Gleichung A0.8 nicht wiedergibt. Die Physik der Kondensatoraufladung[3] muss „per Hand“ in diese Lösung eingeflickt werden, um das richtige, phasenverzögerte Ergebnis zu erhalten.

[3] Die Spannung zwischen den Kondensatorplatten wird von der Ladung auf diesen Platten bestimmt. Der Strom bringt diese Ladung zu den Platten. Damit baut sich die Ladung so lange auf, bis der Strom die Richtung wechselt. Der Richtungswechsel (= Nulldurchgang) findet eine viertel Periode nach den Extrema statt und damit folgen gleiche Phasen der Spannung um $(2\pi)/4 = \pi/2$ zeitverzögert nach denen des Stroms.

A0.2 Komplexe Zahlen

Das Quadrat einer reellen Zahl ist immer positiv. Zieht man die Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl, so gehört das Ergebnis nicht mehr zu der Menge der reellen Zahlen, sondern zu der Menge der imaginären Zahlen. Man kann eine negative reelle Zahl $-R$ immer schreiben als $(-1) \cdot |R|$. Damit wird die Wurzel $\sqrt{-R} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|R|}$. Die Wurzel aus dem Betrag $|R|$ ist in der Menge der reellen Zahlen berechenbar. Die imaginäre Eigenschaft steckt in $\sqrt{-1}$. Man definiert das Symbol[4] i als:

$$i \equiv \sqrt{-1}, \tag{A0.9}$$

als Kennzeichnung (Maßeinheit) für imaginäre Zahlen mit der Rechenregel[5]

$$i^2 = -1. \tag{A0.10}$$

Eine **komplexe Zahl** z ist aus einer reellen und einer imaginären Zahl zusammengesetzt (Linearkombination):

$$z \equiv a + bi. \tag{A0.11}$$

Man nennt $a = Re(z)$ den Realteil und $b = Im(z)$ den Imaginärteil. Es gelten folgende Rechenregeln:

1. Bei der Addition/Subtraktion werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

2. Für die Multiplikation ergibt sich:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

3. Die zu z konjugiert komplexe Zahl z^* ist definiert als $z^* \equiv a - bi$.
   Es ergibt sich für die

Addition:	$z + z^* = (a + bi) + (a - bi) = +2a.$
Subtraktion:	$z - z^* = (a + bi) - (a - bi) = +2bi.$
Multiplikation:	$z \cdot z^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$

   Aber man beachte, dass $z^2 = (a + bi) \cdot (a + bi) = a^2 - b^2 + 2abi$ ergibt.

4. Der Betrag $|z|$ oder Modulus ist definiert als

$$|z| \equiv \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

   Insbesondere ist $|i| = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{1} = 1$.

[4] Bei Ingenieuren und Elektrotechnikern wird anstatt i häufig der Buchstabe j genutzt.
[5] Was stimmt hier nicht? $-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$.

5. Bei der Division zweier komplexer Zahlen erweitert man den Bruch mit dem konjugiert-komplexen Wert des Nenners, der damit reell wird. Der Zähler wird multiplikativ berechnet und man erhält

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

A0.2.1 Graphische Veranschaulichung komplexer Zahlen

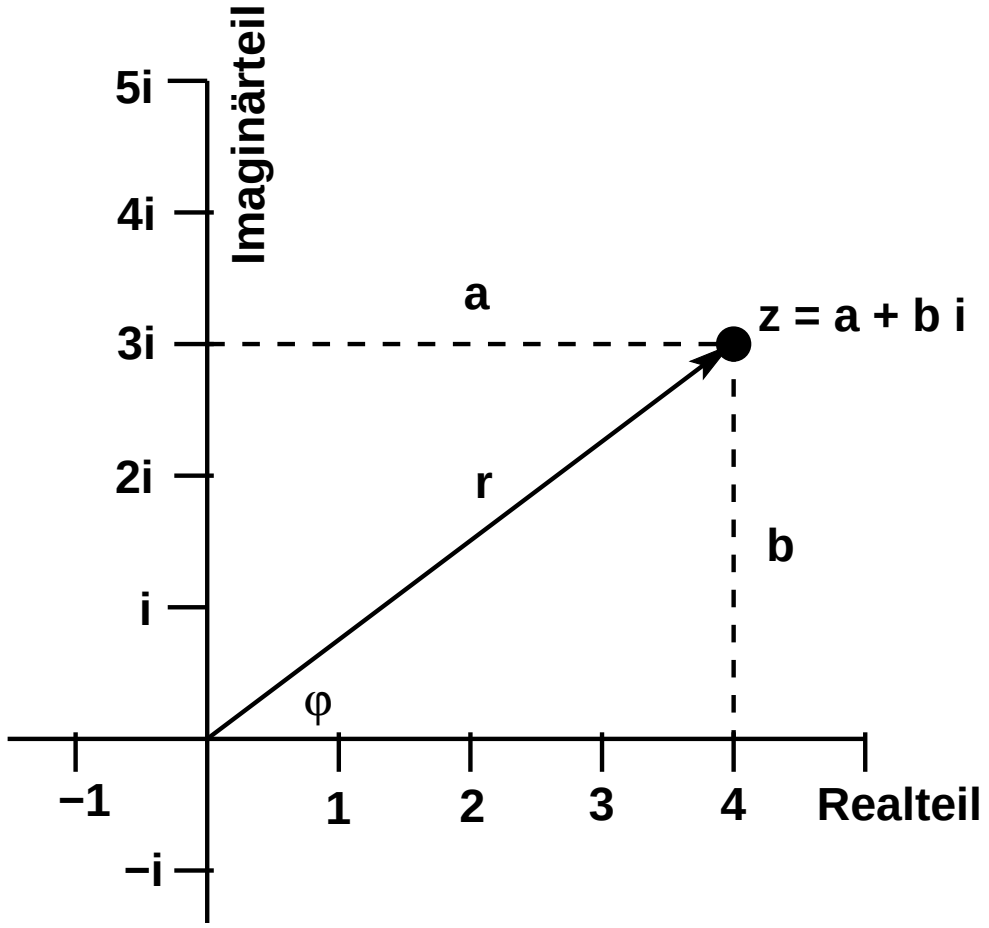


Abbildung A0.2: Komplexe Zahlenebene (Argandsches Diagramm).

Eine komplexe Zahl besteht aus einem Zahlenpaar (a, b). Die Lage eines Punktes in einer Ebene wird durch ein Koordinatenpaar (x, y) beschrieben. Man nutzt diese Analogie, um sich komplexe Zahlen graphisch zu veranschaulichen (siehe Abb. A0.2). Man wählt ein kartesisches Koordinatensystem und trägt den Realteil entlang der Abszisse und den Imaginärteil entlang der Ordinate auf. Man spricht von der komplexen Zahlenebene, dem Argandschen Diagramm oder auch dem Zeigerdiagramm. Der Punkt in Abb. A0.2 stellt die komplexe Zahl $z = a + bi$ dar. Die gerichtete Verbindungslinie (Vektor) vom Ursprung $(0, 0i)$ nach z wird Zeiger genannt.

Neben den kartesischen Koordinaten (x, y) kann man z auch in Polarkoordinaten (r, φ) ausdrücken. Aus Abb. A0.2 liest man ab:

$$\begin{aligned} |r| &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^*} \\ Re(z) = a &= r\cos\varphi \\ Im(z) = b &= r\sin\varphi \\ \text{und damit wird} \quad z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \end{aligned} \tag{A0.12}$$

A0.2.2 Eulersche Formel

Die Eulersche Formel stellt einen Zusammenhang[6] zwischen der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument und der Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten her:

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi. \tag{A0.13}$$

Folgende ausgezeichnete Werte von $e^{i\varphi}$ sollte man kennen:

φ	0	$\pi/2$	π	$-\pi/2$
$e^{i\varphi}$	1	i	-1	$-i$

Mit der Eulerschen Formel kann man die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen herleiten, z.B.:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= Re(e^{i(\alpha+\beta)}) \\ &= Re(e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}) \\ &= Re\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta)\right) \\ &= Re\left(\cos\alpha\cos\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) - \sin\alpha\sin\beta\right) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{A0.14}$$

A0.3 Beschreibung periodischer Vorgänge mit der komplexen Exponentialfunktion

Da nach Gleichung A0.13 $Re(e^{i\varphi}) = \cos\varphi$ ist, kann man die komplexe Exponentialfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen nutzen. Die betrachteten physikalischen Größen werden durch komplexe Zahlen beschrieben. Die Rechnung wird im komplexen Zahlenraum durchgeführt. Je nach Fragestellung ist die gesuchte physikalische Information entweder der Realteil oder der Modulus des Ergebnisses.

Als Beispiel sei erneut der Kondensator betrachtet, der von Wechselstrom durchflossen wird. Die Impedanz der Kondensators wird jetzt durch die komplexe Zahl $Z_C = 1/(i\omega C)$ gegeben. Die Phasenverschiebung wird durch das „i“ bestimmt. Mit dem Ohmschen Gesetz ergibt sich dann für

[6] In Lehrbüchern der Mathematik bzw. über mathematische Methoden in der Physik findet man mehrere unterschiedliche Beweise für die Eulersche Formel.

die Spannung über dem Kondensator:

$$\begin{aligned}
U_C(t) &= Z_C I(t) && \text{Ohmsches Gesetz} \\
&= \tfrac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} && \text{Einsetzen der phys. Größen } (Z_C, I(t)) \\
&= \tfrac{-i}{\omega C} I_0 e^{i\omega t} && \text{Erweitern mit } -i \\
&= \tfrac{e^{-i\pi/2}}{\omega C} I_0 e^{i\omega t} && \text{EULERsche Formel} \\
&= \tfrac{I_0}{\omega C} e^{i(\omega t - \pi/2)} && \text{Zusammenfassen der Exponenten} \\
Re(U_C(t)) &= \tfrac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2). && \text{Reelles Endergebnis}
\end{aligned} \tag{A0.15}$$

Anders als bei der Rechnung im reellen Zahlenraum in Abschnitt A0.1 (siehe Gleichung A0.8) erhält man mit dieser Rechnung (Gleichung A0.15) die richtige Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.

Die Regeln für das Rechnen mit der komplexen Exponentialfunktion sind deutlich einfacher als die Rechenregeln für trigonometrische Funktionen. Als Beispiel sei die Differentiation angeführt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}. \tag{A0.16}$$

Dies wird mehrfach in der Praktikumsanleitung ausgenützt, so z.B. in Anhang A2 (Schwingungen).

In Abb. A0.2 ändert sich der Winkel φ gemäß den Gleichungen A0.5 bis A0.7, d.h. der Zeiger rotiert im Diagramm, wenn Zeit bzw. Ort sich ändern. Wenn man nur an der relativen Phasenlage der physikalischen Größen interessiert ist, kann man die Rotation des Zeigers ignorieren.

Anhang A1

Kurzeinführung in die Statistik

Literatur: Brandt: Datenanalyse; Barlow: Statistics; Cowan: Statistical Data Analysis

A1.1 Messungen aus statistischer Sicht

Beim Messen ermittelt man mittels experimenteller Techniken den Wert physikalischer Größen. Statistisch gesehen sind diese Messgrößen Zufallsvariablen, die durch im Allgemeinen unbekannte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (häufig auch mit PDF für *probability density function* abgekürzt) beschrieben werden. Messwerte stellen eine Stichprobe der durch die PDF beschriebenen Grundgesamtheit (also der Menge aller möglichen Messergebnisse) dar.

Das (Un-)Wissen über die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung variiert von Fall zu Fall. Manchmal kennt man die Form der Verteilung, weiß jedoch nichts über deren charakteristische Parameter, in anderen Fällen ist nicht einmal die Form der PDF bekannt. Ziel einer Messung ist in der Regel die Schätzung der Parameter der zugrunde liegenden PDF anhand der verfügbaren Messwerte. Bei geeignet gewählten Schätzern ist die Präzision der Schätzung nur durch den Stichprobenumfang (also der Anzahl der Messwerte) beschränkt. Ist die Form der PDF unbekannt, werden üblicherweise generische Parameter, wie z. B. der Mittelwert oder die Standardabweichung der Verteilung abgeschätzt.

Eine besondere Stellung unter den PDFs nimmt die Gaußverteilung ein. Ihre Bedeutung liegt im *Zentralen Grenzwertsatz* begründet, der besagt, dass die Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen für $n \to \infty$ gaußverteilt ist, unabhängig davon, wie die einzelnen x_i verteilt sind. Eine Gaußverteilung wird durch die Funktionsvorschrift

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{A1.1}$$

beschrieben und besitzt zwei Parameter, μ und σ.

A1.2 Schätzung von Parametern

Bei der Diskussion von Parameterschätzungen muss man stets darauf achten, dass man einen Parameter und seinen Schätzer nicht verwechselt. Um den Unterschied deutlich zu machen, werden im Folgenden Schätzer durch ein Hut-Symbol gekennzeichnet, z. B. kennzeichnet $\hat{\mu}$ einen Schätzer des Parameters μ.

Schätzer für Parameter operieren auf dem Stichprobenraum (einer Teilmenge der Grundgesamtheit), wohingegen in die Bestimmung der Parameter selbst die gesamte Grundgesamtheit einfließt.

A1.2.1 Mittelwert

Als (Populations-)Mittelwert μ einer Zufallsvariablen x, die gemäß einer PDF $f(x)$ verteilt ist, bezeichnet man den Erwartungswert

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \mu. \tag{A1.2}$$

Im Fall einer diskreten Zufallsvariablen geht Gleichung A1.2 über in

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{A1.3}$$

Hier ist N die Populationsgröße und x_i sind die Populationsmitglieder.

Als Schätzer $\hat{\mu}$ für den Mittelwert μ einer Grundgesamtheit wird häufig der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ der Stichprobenelemente verwendet:

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{A1.4}$$

Hierbei bezeichnet n den Stichprobenumfang (Anzahl der Messungen, die für die Schätzung zur Verfügung steht) und x_i die Stichprobenelemente. $\overline{x}$ wird auch Stichprobenmittelwert genannt.

A1.2.2 Varianz und Standardabweichung

Die (Populations-)Varianz $V[x]$ einer Zufallsvariablen x mit PDF $f(x)$ ist definiert als der folgende Erwartungswert

$$E[(x - E[x])^2] = \int_{\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, \mathrm{d}x = V[x] \tag{A1.5}$$

$$= E[x^2] - \mu^2. \tag{A1.6}$$

Für diskrete Zufallsvariablen lässt sich Gleichung A1.5 als

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \tag{A1.7}$$

schreiben.

Ein Schätzer $\hat{V}$, der aus einer gegebenen Strichprobe die Varianz V einer Grundgesamtheit ab-

schätzt, ist

$$\hat{V} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1}(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \tag{A1.8}$$

$\hat{V}$ wird Stichprobenvarianz genannt. Beim Vergleich von Gleichung A1.7 und Gleichung A1.8 fallen einem folgende Unterschiede auf:

- Für den Schätzer wird der Schätzer des Mittelwertes $\hat{\mu} = \overline{x}$ verwendet (der Mittelwert selbst ist in der Regel unbekannt).

- Im Nenner des Schätzers $\hat{V}$ wird durch $n - 1$ geteilt. Dies liegt darin begründet, dass dieselben Daten, die zur Varianzschätzung herangezogen werden, vorher schon zur Schätzung des Mittelwerts verwendet wurden. Durch die Mittelwertschätzung geht dem System quasi ein Freiheitsgrad verloren[1].

Die Standardabweichung σ einer Grundgesamtheit ergibt sich durch Wurzelziehen aus der Varianz V:

$$\sigma = \sqrt{V}. \tag{A1.9}$$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Elemente der Grundgesamtheit um ihren Mittelwert μ. Im Zusammenhang mit Messungen wird die Standardabweichung häufig auch als *Unsicherheit* oder *Fehler* der Messung bezeichnet.

Analog gilt für die Schätzer der Zusammenhang[2]:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{V}}. \tag{A1.10}$$

Neben den Stichprobenelementen x_i ist auch der Mittelwertschätzer $\hat{\mu}$ eine Zufallsvariable. Wiederhole ich eine Messreihe aus n Einzelmessungen m mal, ergeben sich im Allgemeinen m verschiedene Schätzwerte $\hat{\mu}_i$ für den Mittelwert μ, obwohl μ für alle Messreihen identisch ist. Ein Maß für die Streuung der geschätzten Mittelwerte $\hat{\mu}_i$ ist ihre Standardabweichung. Sie ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}} = \sqrt{V[\overline{x}]} = \sqrt{E[\overline{x}^2] - (E[\overline{x}])^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{A1.11}$$

Die Präzision eines Mittelwertschätzers nimmt also mit der Quadratwurzel des Stichprobenumfangs n zu. Vervierfacht man den Stichprobenumfang, verringert sich die Unsicherheit des Mittelwertschätzers um einen Faktor zwei.

Analog lassen sich für andere Schätzer die Varianz (und Standardabweichung) bestimmen. Entsprechende Formeln können der Literatur entnommen werden (siehe z. B. Glen Cowan, Statistical Data Analysis, Kapitel 5.2).

[1] Über diese Plausibilitätsargumentation hinaus lässt sich mathematisch zeigen, dass nur bei Division durch $n - 1$ der Schätzer erwartungstreu ist.

[2] Man beachte, dass $\hat{\sigma}$ wie in Gleichung A1.10 definiert nicht erwartungstreu ist, obwohl dies für $\hat{V}$ der Fall ist.

A1.2.3 Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Die Kovarianz V_{xy} zweier Zufallsvariablen x und y mit der PDF $f(x, y)$ und den Populationsmittelwerten μ_x und μ_y ist definiert als

$$V_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[xy] - \mu_x\mu_y \tag{A1.12}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \mu_x\mu_y. \tag{A1.13}$$

Diese Größe gibt Auskunft über den statistischen Zusammenhang zwischen x und y (auch Korrelation genannt) und zwar bedeutet

- $V_{xy} > 0$, dass Überfluktuationen von x (also Stichprobenelemente mit $x_i > \mu_x$) bevorzugt einhergehen mit Überfluktuationen von y bzw. Unterfluktuationen von x mit Unterfluktuationen von y, und
- $V_{xy} < 0$, dass Überfluktuationen von x bevorzugt einhergehen mit Unterfluktuationen von y, bzw. Unterfluktuationen von x mit Überfluktuationen von y.

Beim Vergleich der Korrelationsstärke verschiedener Zufallsvariablenpaare ist es von Nachteil, dass die Kovarianz dimensionsbehaftet ist. Dieser Nachteil wird durch die Einführung des Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} wettgemacht:

$$\rho_{xy} = \frac{V_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}. \tag{A1.14}$$

ρ_{xy} kann Werte im Bereich $-1 \le \rho_{xy} \le 1$ annehmen.

Aufgrund der Differenzterme ist V_{xy} invariant unter Verschiebungen des Koordinatenursprungs.

Ein (erwartungstreuer) Schätzer $\hat{V}_{xy}$ für die Kovarianz V_{xy} zweier Zufallsvariablen x und y ist

$$\hat{V}_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})) = \frac{n}{n-1}(\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}). \tag{A1.15}$$

Ein (nur asymptotisch[3] erwartungstreuer) Schätzer $\hat{\rho}_{xy}$ für den Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} ist

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{V}_{xy}}{\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}. \tag{A1.16}$$

A1.3 Fortpflanzung von Unsicherheiten

Häufig ist die Größe g, die man experimentell bestimmen möchte, nicht direkt messbar, sondern ergibt sich aus einer funktionalen Beziehung $g(\vec{x})$ der Messgrößen $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. In diesem Fall pflanzen sich die Unsicherheiten der Messgrößen auf die gesuchte Endgröße fort.

[3] D. h. für $n \to \infty$, also für einen großen Stichprobenumfang.

In dem Fall, wo $g(\vec{x})$ in einer Umgebung in der Größenordnung der x_i-Unsicherheiten als ungefähr linear betrachtet werden kann, lässt sich das Fortpflanzungsgesetz für die Unsicherheiten recht einfach herleiten. Eine Tayler-Entwicklung bis zur ersten Ordnung in $\vec{x}$ liefert

$$g(\vec{x}) \approx g(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_i - \mu_i), \tag{A1.17}$$

wobei die μ_i die Mittelwerte für die Zufallsvariablen x_i sind. In dieser Näherung ergibt für die Varianz σ_g^2 von g

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} V_{ij}, \tag{A1.18}$$

wobei V_{ij} die Kovarianz für die Zufallsvariablen x_i und x_j ist. Im Fall unkorrelierter Zufallsvariablen vereinfacht sich Gleichung A1.18 zu

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}^2 \sigma_i^2. \tag{A1.19}$$

Hier kennzeichnet $\sigma_i^2 = V_{ii}$ die Varianz für die Zufallsgröße x_i.

A1.4 Geraden-Anpassung („Fit“)

Im Folgenden ist die Einstellvariable x immer als fehlerfrei angenommen. Für die Anwendungen in diesem Praktikum ist diese Voraussetzung gut erfüllt. In der Praxis wird es oft vorkommen, dass auch die variierte Größe x einen Fehler σ_x (z.B. die Auflösung eines Gerätes) hat.

A1.4.1 Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate (least squares)

Die Aufgabe besteht darin, an die Messpunkte $\{y_i \pm \sigma(y_i), x_i\}$ eine Gerade $y = mx + n$ anzupassen. Es sollen der Achsenabschnitt $n \pm \sigma_n$ und die Steigung $m \pm \sigma_m$ bestimmt werden. Die Gausssche Methode verlangt, dass die Summe aller varianzgewichteten Abweichungsquadrate der N Messpunkte von der Geraden minimal ist:

$$\chi^2(m,n) := \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma^2(y_i)} \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \tag{A1.20}$$

Die Größe χ^2 im Minimum ist also ein Gütekriterium für die Anpassung.

Dieser Ansatz für χ^2 gewährleistet, dass die Fit-Gerade durch Messpunkte mit großem Fehler wenig und durch solche mit kleinem Fehler stark bestimmt wird. Dafür sorgt die Wichtung mit $1/\sigma^2(y_i)$. Mit der gleichen (in diesem Anhang nur durch die Fehler $\sigma(y_i)$ gegebenen) Wichtung müssen beide Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ berechnet werden.

A1.4.2 1. Fall: Alle Messwerte y_i haben den gleichen Fehler $\sigma(y_i) = \sigma_y$

Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt in diesem einfachen Fall für den Fit einer Geraden die Minimierung der Summe

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_y^2}$$

bezüglich beider Geradenparameter m und n. Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach m und nach n führt auf zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial m} \stackrel{!}{=} 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - n)x_i \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial n} \stackrel{!}{=} 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - n) \quad \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Mit den Mittelwerten $\overline{x}$ und $\overline{y}$ (die in diesem einfachen Fall den ungewichteten Mittelwerten gleich sind) folgt daraus das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \overline{xy} - m\overline{x^2} - n\overline{x} &= 0 \\ \overline{y} - m\overline{x} - n &= 0. \end{aligned}$$

Daraus erhält man m und n:

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{V_{xy}}{V[x]} \tag{A1.21}$$

$$n = \frac{\overline{x^2}\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \overline{y} - m\overline{x} \tag{A1.22}$$

Die Fehler der Steigung m und des Achsenabschnitts n ergeben sich, weil die Messpunkte untereinander nicht korreliert sind, mit Fehlerfortpflanzung aus Gleichungen A1.21 und A1.22 zu

$$V[m] = \sigma^2[m] = \sum_i \left(\frac{x_i - \overline{x}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \right)^2 \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \tag{A1.23}$$

$$V[n] = \sigma^2(n) = \sum_i \left(\frac{\overline{x^2} - \overline{x}x_i}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \right)^2 \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2 \overline{x^2}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \tag{A1.24}$$

$$\rightsquigarrow V[n] = \overline{x^2} V[m].$$

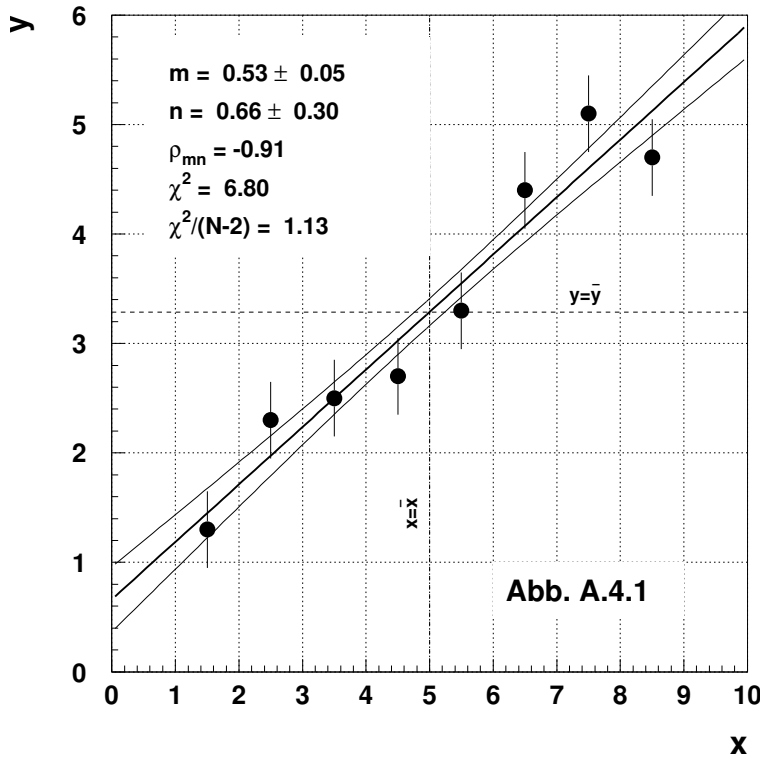


Abbildung A1.1: Datenpunkte und Fit-Ergebnis als Beispiel zum 1. Fall.

Achsenabschnitt n und Steigung m sind im Allgemeinen korreliert. Ihre Kovarianz ist

$$V_{mn} = -\frac{\overline{x}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \cdot \sigma_y^2 = -V[m] \cdot \overline{x}. \tag{A1.25}$$

Diese Korrelation – und damit die Kovarianz – verschwindet, wenn $\overline{x} = 0$ gilt, oder dies durch Translation $x \to x' = x - \overline{x}$ erst erreicht und dann der Geraden-Fit durchgeführt wird. Nur in diesem Fall ist „gewöhnliche“ Fehlerfortpflanzung, $\sigma^2(y(x)) = \sigma^2(m)x^2 + \sigma^2(n)$, richtig.

Abb. A1.1 gibt ein Beispiel für diesen 1. Fall. Der Datensatz umfasst 8 Messpunkte mit gleichem Fehler σ_y. Die Fit-Gerade ist eingezeichnet; sie geht immer durch die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ (nützliche Erkenntnis beim Einzeichnen einer Ausgleichsgeraden „von Hand“). Die Fit-Parameter m und n sind angegeben, ebenso der Fit-Wert für das minimale χ^2. Ebenfalls eingezeichnet sind die 1σ-Konturen um die Gerade (siehe Abschnitt A1.4.6). χ^2 bezieht sich auf die Wertemenge. (Zu $\chi^2/(N-2)$ siehe den letzten Abschnitt dieses Anhangs.)

A1.4.3 2. Fall: Jeder Messwert y_i hat einen eigenen unabhängigen Fehler $\sigma(y_i) := \sigma_i$

Durch diese Fehler $\sigma(y_i)$ bekommt jeder Messpunkt (y_i, x_i) im Fit das Gewicht $1/\sigma_i^2$. Die zu minimierende Summe ist nun

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_i^2} =: \chi^2.$$

Die Formeln für die Steigung (Gleichung A1.21) und den Achsenabschnitt (Gleichung A1.22) und deren Herleitung bleiben formal wie im Fall 1 erhalten, wenn bei der Bildung beider Mittelwerte $\overline{z} \in \{\overline{x}, \overline{y}\}$ die individuellen Gewichte $\sigma(y_i) =: \sigma_i$ hergenommen werden (**varianzgewichtete Mittelwerte**):

$$\overline{z} := \frac{\sum_i^N \frac{z_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i^N \frac{1}{\sigma_i^2}}. \tag{A1.26}$$

Auch die Varianz-Formeln (Gleichungen A1.23, A1.24) werden modifiziert, indem neben den varianzgewichteten Mittelwerten anstelle von σ_y^2 die **varianzgemittelte Standardabweichung**

$$\overline{\sigma_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{A1.27}$$

eingesetzt wird. Diese Ersetzung muss auch in der Kovarianz-Formel (Gleichung A1.25) erfolgen.

Abb. A1.2 gibt ein Beispiel für diesen 2. Fall. Die 8 Messpunkte haben die gleichen Zentralwerte wie im 1. Beispiel, jetzt aber individuelle Fehler σ_i. Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$, Fit-Gerade und Fit-Wert χ^2 sind andere als im 1. Beispiel!

A1.4.4 3. Fall: Die Messwerte y_i haben sowohl unabhängige Fehler $\sigma(y_i)$ als auch systematische Fehler $s(y_i)$

Dieser allgemeine Fall führt auf nicht-triviale Formeln für Steigung und Achsenabschnitt sowie deren Fehler, auf die hier verzichtet werden.

Ein interessanter Spezialfall liegt vor, wenn alle Messpunkte den gleichen systematischen Fehler $s(y_i) =: s_y$ haben. Steigung und Achsenabschnitt sind auch hier formal durch Gleichungen A1.21 und A1.22, aber mit varianzgewichteten Mittelwerten, gegeben. Die Fehler sind jedoch andere. In

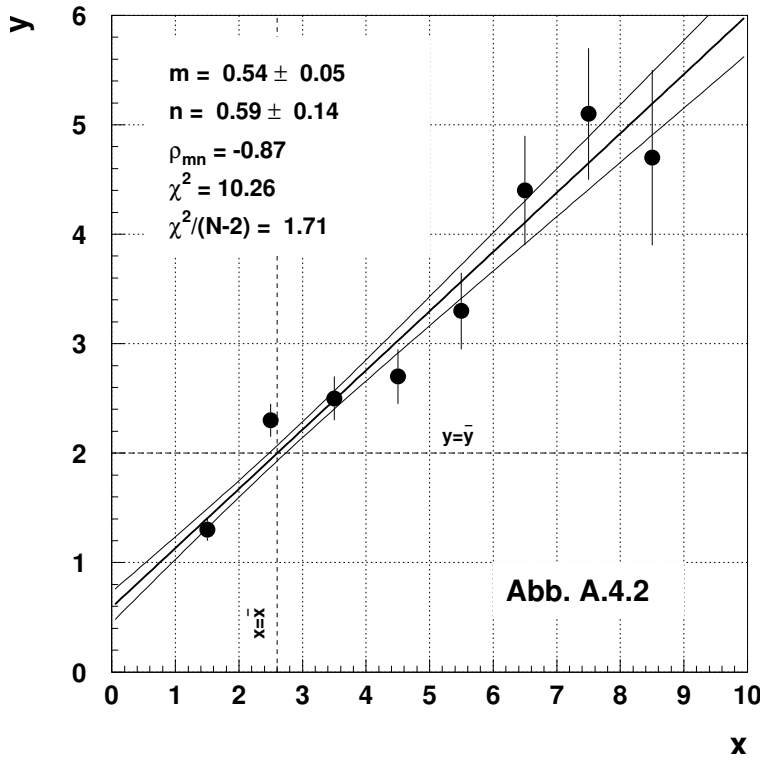


Abbildung A1.2: Datenpunkte und Fit-Ergebnis als Beispiel zum 2. Fall. Auch hier geht die Ausgleichsgerade durch den (varianzgewichteten) Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$.

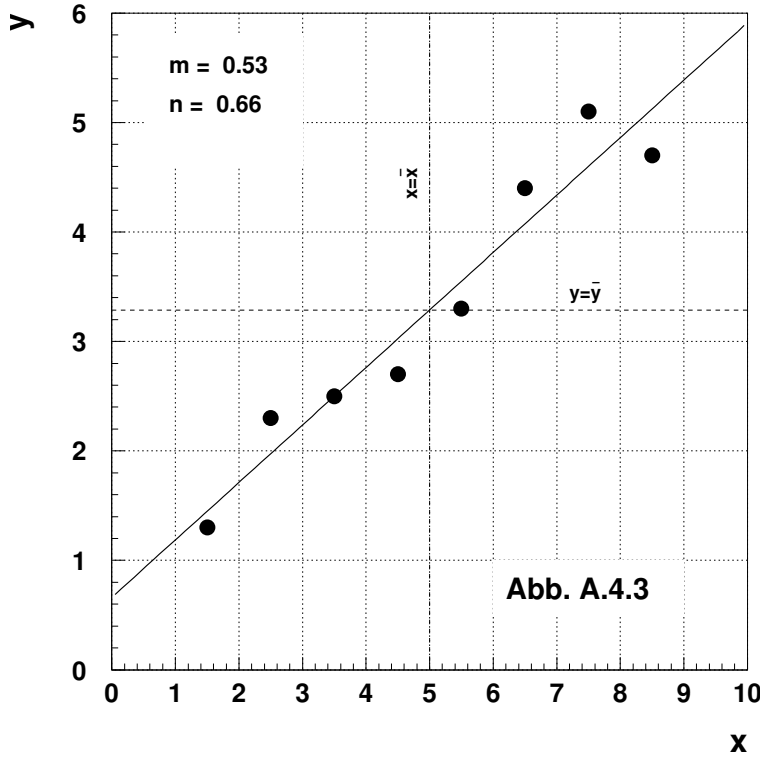


Abbildung A1.3: Punkte und Regressionsgerade als Beispiel zum 4. Fall.

diesem Spezialfall gilt für die Varianz der Steigung:

$$V[m] = \sigma^2[m] = \frac{\overline{\sigma_y^2}}{N(\overline{x^2} - \overline{x}^2)} \tag{A1.28}$$

Der gemeinsame Fehler s_y beeinflusst weder die Steigung noch deren Fehler. Für die Varianz des Achsenabschnitts gilt in diesem Spezialfall:

$$V[n] = \sigma^2[n] = \frac{\overline{\sigma_y^2}}{N(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}\overline{x^2} + s_y^2. \tag{A1.29}$$

Obwohl der gemeinsame Fehler s_y nicht den Fit-Wert für den Achsenabschnitt beeinflusst, vergrößert sich dessen Fehler $\sigma_n = \sqrt{V[n]}$ durch quadratische Addition. V_{mn} ändert sich nicht. Auf ein Beispiel zum 3. Fall wird verzichtet.

A1.4.5 4. Fall: Die Werte y_i haben keine Fehler.

Dieser Fall tritt bei physikalischen Messungen – und insbesondere in diesem Praktikum – nicht auf; alle Messwerte haben Messfehler. Er ist hier aufgeführt, weil die Aufgabe, den Trend der Wertepaare $\{y_i, x_i\}$ durch eine Gerade zu beschreiben, als Spezialfall des 1. Falls durch die glei-

chen Formeln (d.h. Gleichungen A1.21 und A1.22, natürlich mit ungewichteten Mittelwerten) gelöst wird und diese Formeln bzw. deren Bestandteile unter dem Namen **Lineare Regression** auf manchen Taschenrechnern programmiert sind. Das Ergebnis des ungewichteten Geradenfits ist in Abb. A1.3 dargestellt. Die Fehler von Steigung und Achsenabschnitt werden vom Taschenrechner in der Regel nicht ausgegeben, und χ^2 steht als Qualitätskriterium nicht zur Verfügung. Ähnliches kann für Standardprogramme auf PC-Rechnern gelten.

A1.4.6 Werteberechnung auf der Fit-Geraden

Sind Steigung und Achsenabschnitt samt Fehlern bestimmt, benötigt man oft einen Wert $y(x) \pm \sigma(y(x))$ auf der Fit-Geraden. Es gilt an der Stelle x:

$$y(x) = m \cdot x + n \tag{A1.30}$$

$$\sigma^2[y(x)] = \sigma^2[m] \cdot x^2 + \sigma^2[n] + 2V_{mn} \cdot x \tag{A1.31}$$

Der letzte Term ist i.A. nicht zu vernachlässigen! Die Kovarianz (aus Gleichung A1.25) verschwindet nur im „Schwerpunktsystem“ der Werte $\{x_i\}$, also wenn $\overline{x} = 0$ gilt. Nur dann sind m und n unabhängig. In diesem System gelangt man zu:

$$y(x) - \overline{y} = m \cdot (x - \overline{x})^2 \tag{A1.32}$$

und es gilt dann:

$$\sigma^2[y(x)] = \sigma^2[m] \cdot (x - \overline{x})^2 + \sigma_n^2 \tag{A1.33}$$

Insbesondere bekommen Extrapolationen aus dem Messpunkte-Bereich heraus schnell große Fehler.

A1.4.7 Güte des Geraden-Fits

Ein geeignetes Gütekriterium für die mittlere quadratische Abweichung zwischen Messdaten und Fit-Gerade erhält man durch richtige Normierung von χ^2 nach Gleichung A1.20. Die Normierung ist allgemein gegeben durch die Anzahl der Fit-Freiheitsgrade f, d.h. durch die Anzahl der verwendeten Messpunkte (N) abzüglich der Anzahl der Fit-Parameter. Letztere sind 2 beim Geraden-Fit, also braucht man $N > 2$ Messpunkte, um einen Fit durchführen zu können:

$$\frac{\chi^2}{\text{d.o.f.}} := \frac{\chi^2}{N-2} = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_i^2}. \tag{A1.34}$$

Für eine gute Beschreibung der Messdaten durch den Fit gilt χ^2/f nahe bei 1, d.h. die Ausgleichsgerade weicht im Mittel um nicht mehr als die (Mess-)Fehler von den Messpunkten ab.

A1.4.8 Hinweis zur „Ausgleichsgeraden per Hand“

Die obige mathematische Behandlung zeigt, dass die Ausgleichsgerade durch den varianzgewichteten Schwerpunkt der Datenpaare geht. Transformiert man das anfängliche Koordinatensystem so, dass der Nullpunkt der neuen, verschobenen x-Achse im Datenschwerpunkt der $\{x_i\}$ liegt, so sind Steigung und Achsenabschnitt nicht mehr korreliert; zusätzlich liegt der Achsenabschnitt dann im Schwerpunkt der $\{y_i\}$ Diese Information hilft beim Zeichnen einer Ausgleichsgerade mit Lineal und Augenmaß. Zunächst schätzt man die Lage des Schwerpunktes ab (z.B. nimmt man die Mittelwerte der x_i und der y_i) und zeichnet ihn in den Graphen mit den Datenpaaren als zusätzlichen Punkt ein. Dann „sticht“ man einen Bleistift in den Schwerpunkt und schiebt das Lineal dagegen. Dann dreht man das Lineal um diese Bleistiftachse, bis die Datenpaare beidseitig der Lineallinie statistisch gleichmäßig verteilt sind, womit die Ausgleichsgerade festgelegt ist. Eine Fehlerabschätzung der Geradensteigung erhält man durch weiteres Drehen des Lineals bis auf der einen Seite der Drehachse alle Punkte oberhalb und auf der anderen Seite unterhalb des Lineals liegen; bei der zweiten Fehlergeraden vertauscht man „oberhalb“ und „unterhalb“. Da der Schwerpunkt innerhalb des Datenbereichs liegt, kreuzen sich auch Ausgleichs- und Fehlergeraden innerhalb des Datenbereichs.

Anhang A2

Schwingungen

Am Beispiel eines Drehschwingers werden im Folgenden die allgemeinen Eigenschaften schwingfähiger Systeme zusammengestellt und diskutiert.

A2.1 Freie Schwingung ohne Dämpfung

Idealisierter Fall: Reibungsverluste vernachlässigt.

Bewegungsgleichung (Drehmomentengleichung):

$$\Theta\ddot{\varphi} = -D\varphi, \tag{A2.1}$$

Θ = Trägheitsmoment des Drehkörpers

D = Richtkonstante

$D\varphi$ = rücktreibendes Drehmoment

Die zugehörige **Normalform** (für alle Schwingungssysteme) lautet:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{\Theta} \tag{A2.2}$$

Mathematisch handelt es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die allgemeine Lösung ist die Summe von 2 linear unabhängigen Lösungen. **Lösungsansatz:** $\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$ mit A und λ allgemein komplex. Die Lösung muss eine Funktion sein, die sich beim Differenzieren bis auf eine Konstante reproduziert. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 \tag{A2.3}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \tag{A2.4}$$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}. \tag{A2.5}$$

φ ist eine messbare Variable und daher reell. Gesucht sind also nur solche Lösungen, die ein reelles φ ergeben. Das legt den Konstanten A und B die Bedingung $B = A^*$ auf, d.h. wenn $A = a + ib$ ist, muss $B = a - ib$ sein. $\varphi(t)$ ist dann (Euler-Formel) zweimal der Realteil von $(a + ib) \cdot (\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t))$:

$$\varphi(t) = 2a \cdot \cos(\omega_0 t) - 2b \cdot \sin(\omega_0 t). \tag{A2.6}$$

Die noch unbestimmten Konstanten a und b werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt, z.B.: $\varphi(t=0) = \varphi_0 = 2a$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0 = -2b$.

Damit folgt aus Gleichung A2.6 $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$, mit der Frequenz $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ und der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_0$. Das System schwingt harmonisch, d.h. (co-)sinusförmig, mit konstanter Amplitude φ_0 und die Eigenfrequenz ω_0, welche unabhängig von der Amplitude ist.

Anmerkung: Die allgemeine Lösung in Gleichung A2.6 ist äquivalent zu der Lösungsform

$$\varphi(t) = c\cos(\omega_0 t - \alpha). \tag{A2.7}$$

Die beiden unbestimmten Konstanten a und b können durch die Konstanten $c^2 = 4(a^2 + b^2)$ und α mit $\tan\alpha = -b/a$ (α Phasenwinkel) ausgedrückt werden (Additionstheorem für den Cosinus).

A2.2 Freie Schwingung mit Dämpfung

Realistischer Fall: Reibungsverluste berücksichtigt.

Bewegungsgleichung:

$$\Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = 0 \tag{A2.8}$$

mit dem Reibungs- (oder Dämpfungs-)Drehmoment $r\dot{\varphi}$, das proportional der Winkelgeschwindigkeit ist. Damit ergibt sich folgende **Normalform**:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad \text{mit} \quad 2\beta = \frac{r}{\Theta}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}. \tag{A2.9}$$

Im Allgemeinen führt der Lösungsansatz $\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$ zu zwei Werten für λ:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{A2.10}$$

Es sind **drei Fälle** zu unterscheiden:

a) $\beta^2 > \omega_0^2$ Kriechfall,

b) $\beta^2 = \omega_0^2$ Grenzfall,

c) $\beta^2 < \omega_0^2$ Schwingfall,

die drei charakteristisch verschiedene Bewegungsformen (Abb. A2.1) beschreiben.

A2.2.1 Kriechfall ($\beta^2 > \omega_0^2$)

$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ist reell und positiv. $\lambda_1 = -\beta + \gamma$ und $\lambda_2 = -\beta - \gamma$ sind beide **reell** und **negativ** ($\gamma < \beta$). Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{A2.11}$$

mit den **reellen** Konstanten A und B, die durch gewählte Anfangsbedingungen festgelegt werden können. Das System schwingt nicht, sondern bewegt sich aperiodisch (Abb. A2.1, unten). Ist es einmal aus der Ruhelage ausgelenkt, bewegt es sich asymptotisch kriechend zu ihr zurück (z.B. Fadenpendel in Sirup statt Luft).

A2.2.2 Aperiodischer Grenzfall ($\beta^2 = \omega_0^2$)

Hier fallen die beiden λ-Werte zusammen und es ist somit nur eine partikuläre Lösung gefunden. Zum Aufsuchen der zweiten, linear unabhängigen Lösung macht man den Ansatz:

$$\varphi(t) = f(t) \cdot e^{\lambda t}, \tag{A2.12}$$

und zwar mit der einfachsten Möglichkeit für $f(t)$, nämlich $f(t) = Bt$. Das führt zu der Bestimmungsgleichung für λ:

$$t \cdot (\lambda + \omega_0)^2 = -2\,(\lambda + \omega_0)\,. \tag{A2.13}$$

Sie ist nur dann für alle Zeiten t erfüllt, wenn $\lambda + \omega_0 = 0$; insbesondere λ **reell** und **negativ** ist. Damit ergibt sich die Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\omega_0 t} + Bte^{-\omega_0 t}; \quad A \text{ und } B \textbf{ reell}. \tag{A2.14}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi(t=0) &= \varphi_0 = A \\ \dot{\varphi}(t=0) &= \ 0 \ = -\omega_0 \cdot A + B. \end{aligned}$$

$$\text{Damit:} \qquad \varphi(t) = \varphi_0\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}. \tag{A2.15}$$

Auch in diesem Fall ist die Bewegung aperiodisch. $\varphi(t)$ geht monoton gegen 0. Das System kommt in besonders kurzen Zeiten der Ruhelage sehr nahe, z.B. wird in der charakteristischen Zeit $T = 2\pi/\omega_0$ bereits der Wert $\varphi(T) = 0,014$ erreicht. Diese Bewegungsform stellt den Grenzfall der aperiodischen Bewegung dar. Das System schwingt gerade eben nicht (Abb. A2.1, Mitte).

Bei analogen Messgeräten mit schwingfähigen Messsystemen (z.B. Drehspulinstrumente) ist man an kurzen Einstellzeiten auf den Messwert (= Ruhelage) interessiert. Ihre Dämpfung wird daher in der Regel so gewählt, dass sie nahe dem aperiodischen Grenzfall arbeiten, und zwar gerade sowenig in Richtung „Schwingfall“ ($\beta^2 \leq \omega_0^2$), dass das Messsystem einmal durchschwingt und sich aperiodisch der Ruhelage nähert.

A2.2.3 Schwingfall ($\beta^2 < \omega_0^2$)

Wie im ungedämpften Fall ergeben sich zwei verschiedene **komplexe** Werte für λ:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\hat{\omega}. \tag{A2.16}$$

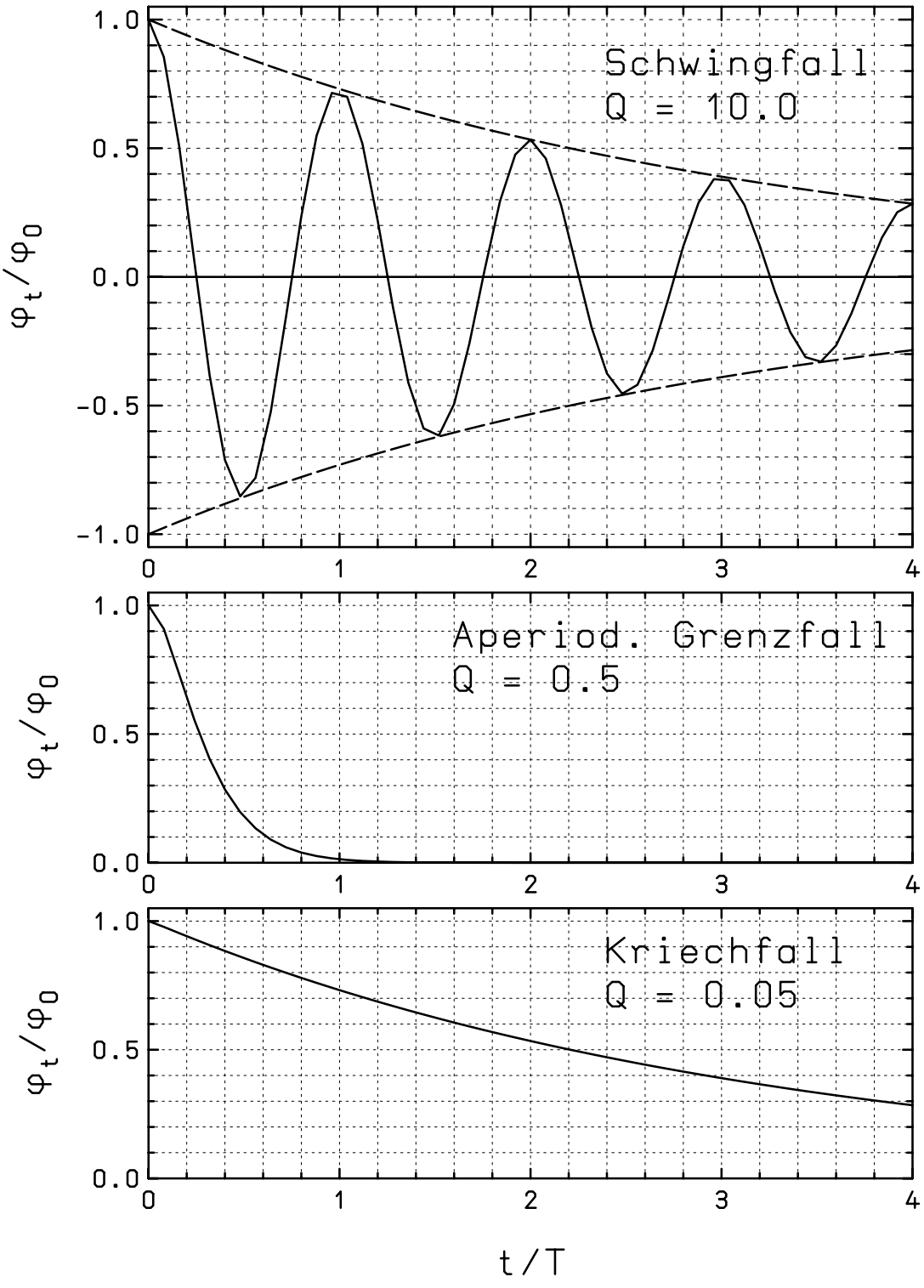


Abbildung A2.1: **Freie Schwingung** für die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ für den Schwingfall (oben), den aperiodischen Grenzfall (mitte) und dem Kriechfall (unten). Die Abszisse ist in Einheiten der Schwingungsdauer T angegeben.

Mit denselben Anfangsbedingungen wie im ungedämpften Fall erhält man die Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} \cdot \cos \hat{\omega} t \quad \text{mit} \quad \hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{A2.17}$$

Die Eigenfrequenz $\hat{\omega}$ dieser Schwingung ist kleiner als die der ungedämpften Schwingung (ω_0). Der Unterschied ist aber für fast alle Schwingsysteme sehr klein. Die Amplitude:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} \tag{A2.18}$$

klingt exponentiell ab. Nach n bzw. $n + 1$ Schwingungen beträgt sie:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi(nT) &&= \varphi_0 e^{-\beta n T} &&= \varphi_0 \left(e^{-\beta T}\right)^n \\ \varphi_{n+1} &= \varphi((n+1)T) &&= \varphi_0 e^{-\beta (n+1) T} &&= \varphi_0 \left(e^{-\beta T}\right)^{n+1}, \end{aligned} \tag{A2.19}$$

wobei $T = 2\pi/\hat{\omega}$ die Schwingungsdauer und n ganzzahlig ist (Abb. A2.1, oben).

Aufeinanderfolgende Maximalausschläge unterscheiden sich um einen konstanten Faktor, nämlich um das **„Dämpfungsverhältnis“ K**:

$$K := \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_n}\right)^{1/n} = e^{\beta T}. \tag{A2.20}$$

Der Einfluss der Dämpfung kann auch durch die Zeit τ charakterisiert werden, nach der die Energie des schwingenden Systems auf 1/e abgesunken ist (die Energie ist proportional zu $\varphi^2(t)$):

$$\varphi^2(\tau) = \varphi_0^2 \cdot e^{-2\beta\tau} = \varphi_0^2 \cdot e^{-1}, \tag{A2.21}$$

d.h. $\tau = 1/2\beta$. Ein gedämpftes Schwingsystem wird durch seinen „Gütefaktor“ oder einfach seine **„Güte“** Q:

$$Q := \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} \tag{A2.22}$$

charakterisiert. Für die weitere Diskussion soll nur noch diese (dimensionslose) Größe verwendet werden.

Drückt man die Eigenfrequenz $\hat{\omega}$ durch die des ungedämpften Systems (ω) und die Güte Q aus, so sieht man, dass diese Frequenzen nur wenig voneinander verschieden sind:

$$\hat{\omega} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \tag{A2.23}$$

Selbst für eine so geringe Güte wie $Q = 5$ ist $\hat{\omega} = 0.995\omega_0$. Daher wird im Folgenden die Näherung $\hat{\omega} \approx \omega_0$ verwendet. Damit ergibt sich:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \cos(\omega_0 t), \quad K = e^{\pi/Q} \quad \text{bzw.} \quad Q = \frac{\pi}{\ln(K)}. \tag{A2.24}$$

Die Größe $\ln(K)$ heißt **logarithmisches Dekrement** der gedämpften Schwingung. Eine Bestim-

mung der Güte Q kann also in einfacher Weise über eine Messung des Dämpfungsverhältnisses $K = (\varphi_0/\varphi_n)^{1/n}$ erfolgen.

Nach Q Perioden ist die Energie der Schwingung auf den Bruchteil $e^{-2\pi} = 0,0019$ und die Amplitude auf den Bruchteil $e^{-\pi} = 0,043$ abgesunken.

A2.3 Erzwungene Schwingung mit Dämpfung

Wirkt auf ein Drehschwingsystem ein cosinus-förmiges Drehmoment[1] $M_0 \cos(\omega t)$, so gehorcht das System der **Bewegungsgleichung**:

$$\Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \cos(\omega t) \tag{A2.25}$$

mit der **Normalform**:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \mu \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \mu := \frac{M_0}{\Theta}. \tag{A2.26}$$

Die mathematische Behandlung dieses Problems kann in eleganter Weise mit Hilfe der komplexen Darstellung der Funktionen durchgeführt werden.

Wir wollen hier zunächst die physikalischen Aspekte in den Vordergrund stellen und die Rechnung rein reell durchführen. Wird ein schwingfähiges System von außen gestört, so löst die Störung eine gedämpfte Schwingung mit der Frequenz $\hat{\omega}$ aus, die sich der eventuell vorhandenen Bewegung überlagert. Wirkt ein äußeres Drehmoment $M_0 \cos(\omega t)$ auf das System, so regt es eine solche gedämpfte Eigenschwingung an. Andererseits zwingt das äußere Drehmoment dem System auch eine Schwingung mit seiner Frequenz ω auf. Es entsteht eine Überlagerung von Bewegungen mit den beiden Frequenzen. Dieser Vorgang wird „Einschwingen“ genannt.

Nach einer Zeit $t > \tau$ ist der gedämpfte Anteil der Bewegung abgeklungen. Es ist ein Zustand erreicht, in dem die Energiezufuhr durch das äußere Drehmoment genau die Reibungsverluste deckt („Stationärer Zustand“). Das System schwingt mit mit konstanter Amplitude bei der Frequenz ω.

Genau dieses Verhalten spiegelt auch die mathematische Behandlung wider: Die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung (Gleichung A2.25) ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Der erste Anteil ist bereits bekannt (siehe Abschnitt A2.2). Da wir uns auf kleine Dämpfungen beschränken, handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung der Gestalt:

$$\varphi_{\text{hom.}}(t) = e^{-\beta t}(a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)). \tag{A2.27}$$

Sie beschreibt zusammen mit dem zweiten Anteil den Einschwingvorgang. Der zweite Anteil ist eine ungedämpfte Schwingung mit der Anregungsfrequenz ω. Wir machen daher den allgemeinen Ansatz:

$$\varphi_{\text{inhom.}}(t) = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t). \tag{A2.28}$$

[1] Das ist der Spezialfall einer harmonischen Anregung mit einer Frequenz. Die allgemein periodische, nicht cosförmige Anregung stellt eine Überlagerung solcher Spezialfälle mit verschiedenen Frequenzen dar (Fourier-Zerlegung).

Diese Gleichung beschreibt den stationären Zustand, für den wir uns im Folgenden ausschließlich interessieren. Wir wollen nun die Konstanten c und d so bestimmen, dass die inhomogene Gleichung erfüllt[2] ist. Einsetzen ergibt:

$$\left[d\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2c\beta\omega\right]\tan(\omega t)=\left[\mu-c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2d\beta\omega\right]. \tag{A2.29}$$

Diese Bedingung ist nur dann für alle Zeiten erfüllt, wenn beide eckige Klammern für sich verschwinden. Daraus errechnen sich die Konstanten zu:

$$d=\frac{2\beta\omega\mu}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2};\qquad c=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\mu}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}. \tag{A2.30}$$

Mit der Abkürzung $N:=\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2$ sieht man, dass gilt:

$$\left(d\frac{\sqrt{N}}{\mu}\right)^2+\left(c\frac{\sqrt{N}}{\mu}\right)^2=1. \tag{A2.31}$$

Die beiden Konstanten sind nicht unabhängig voneinander. Sie lassen sich durch eine andere Konstante, den Phasenwinkel α, ausdrücken:

$$d=\frac{\mu}{\sqrt{N}}\sin(\alpha),\qquad c=\frac{\mu}{\sqrt{N}}\cos(\alpha). \tag{A2.32}$$

Damit wird

$$\varphi(t)=\frac{\mu}{\sqrt{N}}\left(\cos(\omega t)\cos(\alpha)+\sin(\omega t)\sin(\alpha)\right) \tag{A2.33}$$

oder (Additionstheorem für den Cosinus):

$$\varphi(t)=\frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t-\alpha) \tag{A2.34}$$

$$\text{mit}\quad \tan(\alpha)=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{A2.35}$$

Das ist eine Schwingung mit der Frequenz ω. Sie hat eine Phasenverschiebung α gegen das äußere Drehmoment. Die Ausdrücke für $\varphi(t)$ und $\tan(\alpha)$ lassen sich mit Hilfe der Güte $Q=\omega_0\tau=\omega_0/2\beta$ folgendermaßen umschreiben:

$$\varphi(t)=\frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}}\cos(\omega t-\alpha) \tag{A2.36}$$

$$\text{und}\quad \tan(\alpha)=\frac{1}{Q}\cdot\frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{A2.37}$$

[2] Die stationäre Schwingung ist unabhängig von den Anfangsbedingungen. Sie wird vom äußeren Drehmoment $M_0\cos(\omega t)$ erzwungen, womit der Zeitnullpunkt bereits festgelegt ist.

Die **Amplitude**

$$\varphi(\omega) = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}} \tag{A2.38}$$

hat einen „Resonanz-Nenner“. Sie ist in Abb. A2.2, oben, als Funktion von ω/ω_0 dargestellt. Die Amplitude wird maximal[3] für den Resonanzfall $\omega = \omega_0$. Sie nimmt dabei einen Wert an, der proportional zur Güte und zur Amplitude des erregenden Drehmoments ist:

$$\varphi\left(\omega = \omega_0\right) = \frac{\mu Q}{\omega_0^2}. \tag{A2.39}$$

Vergleicht man diese Maximalamplitude mit der für $\omega = 0$, so sieht man, dass die Güte auch aus diesen beiden Werten bestimmt werden kann:

$$\varphi(\omega = \omega_0) = Q\varphi(\omega = 0). \tag{A2.40}$$

Für Systeme großer Güte können im Resonanzfall schon kleine periodische Störungen zu sehr großen Amplituden und damit zur Zerstörung des schwingenden Systems führen (Resonanzkatastrophe).

Als Maß für die Breite der Resonanzkurve $\varphi(\omega)$ wählt man üblicherweise den Abstand $\Delta\omega$ der beiden Frequenzen ω_1, für die die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$-fache bzw. die gespeicherte Energie auf das 1/2-fache des jeweiligen Wertes bei $\omega = \omega_0$ abgefallen ist:

$$\varphi(\omega_1) = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + \frac{\omega_0^2\omega_1^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu}{\frac{\omega_0^2}{Q}} = \frac{\varphi(\omega_0)}{\sqrt{2}}. \tag{A2.41}$$

Für hinreichend hohe Güten liegen ω_1 und ω_0 sehr nahe beieinander. Wir benutzen daher die Näherungen

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 = (\omega_0 + \omega_1)(\omega_0 - \omega_1) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega_1) \tag{A2.42}$$

und

$$\omega_0\omega_1 \approx \omega_0^2. \tag{A2.43}$$

[3] Das stimmt nur näherungsweise für hinreichend hohe Güten. Die Auswertung der Extremumbedingung $\frac{\mathrm{d}\phi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0$ ergibt:

Amplitude(ω)	$\omega_{\max}$
Auslenkung: $\mu/\sqrt{N}$	$\omega_0\sqrt{1 - 1/2Q^2}$
Geschwindigkeit: $\mu\omega/\sqrt{N}$	ω_0

Die Frequenz $\omega_{\max}$ des Maximums der Auslenkungsmplitude bei der erzwungenen Schwingung ist verschieden von der Eigenfrequenz der freien Schwingung mit Dämpfung! (Vergleichen Sie mit dem Schwingfall der freien Schwingung in Abschnitt A2.2.3).
Dagegen stimmt die Frequenz $\omega_{\max}$ für die Geschwindigkeitsamplitude mit der Eigenfrequenz der freien Schwingung mit Dämpfung überein. Der Anreger überträgt kinetische Energie auf das schwingfähige System. Der Energieübertrag ist optimal angepasst, wenn die Geschwindigkeitsamplitude bei der Anregungsfrequenz $\omega = \omega_0$ maximal überhöht ist.

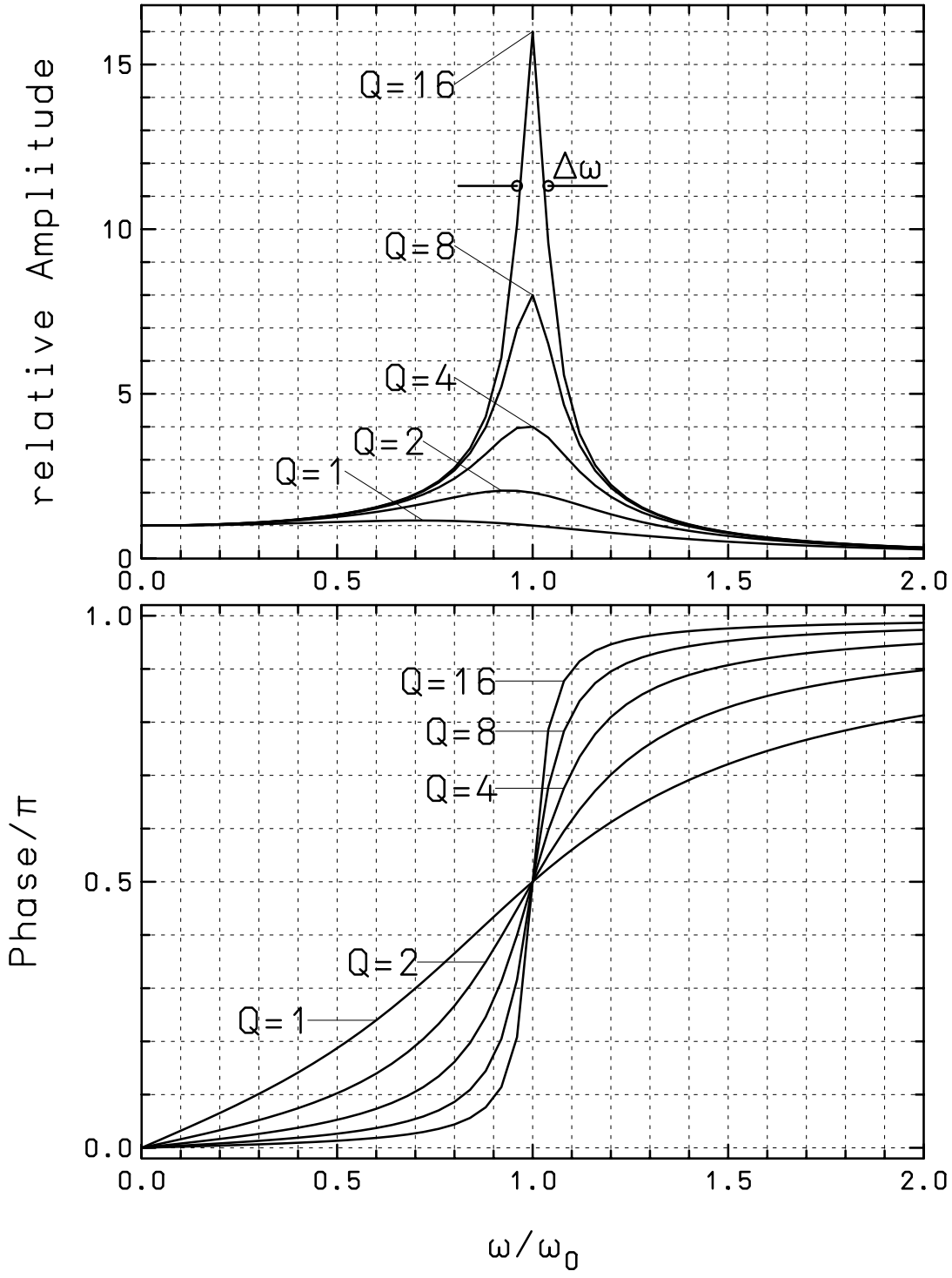


Abbildung A2.2: **Erzwungene Schwingungen:** Amplitude und Phase

Damit folgt: $2(\omega_0 - \omega_1) = \pm\omega_0/Q$ bzw. $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}$. Die „$1/\sqrt{2}$-Wert-Breite“ $\Delta\omega$ der Resonanzkurve ist die volle „Halbwertsbreite“ der Energie-Resonanzkurve:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \tag{A2.44}$$

Breite und Höhe der Resonanzkurve hängen also in umgekehrter Weise von der Güte Q ab. Für hinreichend schwach gedämpfte Systeme kann die Güte aus der Breite $\Delta\omega$ ermittelt werden. Schätzt man mit Hilfe dieses Ergebnisses den Fehler ab, der durch obige Näherung gemacht wird, so erhält man:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(1 + \frac{3}{4Q}\right), \quad \text{d.h. ca. 10\% für } Q = 7,5. \tag{A2.45}$$

Auch die **Phase** der Amplitude zeigt eine charakteristische Abhängigkeit von ω und Q (Abb. A2.2, unten).

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{1}{Q}, \tag{A2.46}$$

$$\begin{aligned} \omega \ll \omega_0 &\Rightarrow \tan(\alpha) \simeq \omega/\omega_0 \Rightarrow \alpha \approx 0, \\ \omega = \omega_0 &\Rightarrow \tan(\alpha) = \infty \Rightarrow \alpha \approx \pi/2, \\ \omega \gg \omega_0 &\Rightarrow \tan(\alpha) \simeq -\omega_0/\omega \Rightarrow \alpha \approx \pi. \end{aligned} \tag{A2.47}$$

Der Übergang der Phase von Werten nahe 0 zu fast π vollzieht sich in einem Frequenzbereich um ω_0 herum, der von der Größe $\Delta\omega$ ist. Der Übergang ist umso abrupter, je größer Q ist. Für die beiden Werte ω_1 gilt mit der obigen Näherung:

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\frac{1}{Q} \approx \pm 1. \tag{A2.48}$$

Die Phase α ist dann 45° bzw. 135°.

Das Verhalten eines harmonischen Schwingsystems ist also durch seine Eigenfrequenz ω_0 und seine Güte Q völlig beschrieben.

Anhang A3

Oszillograph und Datenaufnahme mit dem PC

A3.1 Oszillograph

Ein Oszillograph macht Spannungen als Funktion der Zeit sichtbar. Die entsprechenden Graphen werden auf einem Bildschirm dargestellt, wobei die Spannungen in der Regel die Ordinate und die Zeit die Abzisse des Koordinatensystems darstellen. Mehrkanaloszillographen sind dabei in der Lage, den zeitlichen Verlauf mehrerer verschiedener Spannungen gleichzeitig darzustellen. Alternativ zu Spannungs-Zeit-Graphen können auch zwei verschiedene Spannung gegeneinander aufgetragen werden.

Abbildung A3.1: Frontansicht des im Praktikum verwendeten Oszillographen.

Abbildung A3.1 gibt eine Frontansicht des im Praktikum verwendeten Zwei-Kanal-Oszillographen dar. Durch Drücken der gelben bzw. blauen Taste kann die Anzeige von Kanal 1 bzw. 2 an- und

abgestellt werden. Mit den großen Drehknöpfen unterhalb der gelben bzw. blauen Taste kann die Skala für die Ordinate von Kanal 1 bzw. 2 eingestellt werden (Spannung pro Skaleneinheit). Der dritte große Einstellknopf rechts neben dem für Kanal 2 dient zur Wahl der Skala für die Zeit (Zeit pro Skaleneinheit). Die kleinen Drehknöpfe oberhalb der gelben und blauen Tasten dienen zur vertikalen/horizentalen Verschiebung der dargestellten Spannung-vs.-Zeit-Graphen. Eine solche Verschiebung kann nützlich sein, um das Ablesen zu vereinfachen. Der vierte kleine Drehknopf ganz rechts dient zur Wahl der Trigger-Schwelle.

A3.2 Messdatenerfassung mit dem CASSY System

Bei einigen Versuchsaufbauten werden Messreihen automatisiert mit einem Rechner erfasst. Dazu benötigt man einen „Sensor“, der das zu messende Signal in eine Spannung umwandelt, die an den Digitalisierungsbereich des nachgeschalteten Analog/Digitalwandlers (ADC = Analogue to Digical Converter) angepasst ist. Da Ströme vom ADC nicht gewandelt werden, muss ein Strom erst in eine Spannung konvertiert werden (Strom durch Widerstand geleitet ergibt nach dem Ohmschen Gesetz eine Spannung von $U = RI$). Ist die Signalamplitude größer als die erlaubte Eingangsamplitude, muss sie über eine Spannungsteilerschaltung kaskadiert werden. Bei zu geringer Signalamplitude können die Diskretisierungsschritte des ADC stören und es empfiehlt sich, das Signal vor dem ADC analog zu verstärken.

Der ADC erzeugt einen digitalen Datenstrom, der an einen Rechner über Schnittstellen (seriell, USB, ...) geschickt wird. Auf dem Rechner muss ein Programm laufen, welches den ankommenden Datenstrom dekodiert, in physikalisch relevante Größen (d.h. zunächst Spannungen) umrechnet, gegebenenfalls abgeleitete physikalischen Größen (rechnerisch) ermittelt, diese (online) darstellt und in Dateien zur späteren (offline) Verarbeitung speichert. Diese Software kann auch den Messvorgang steuern, d.h. die angeschlossenen Instrumente im vorgegebenen Zeittakt oder auf Tastendruck „auslesen“. Wenn die Vorschaltgeräte Teil des Gesamtsystems sind, dann kann das Mess- und Steuerprogramm die Auswirkungen der Vorschaltgeräte berücksichtigen.

Im Praktikum wird das kommerzielle System CASSY von Leybold-Didactic eingesetzt. Booten des PCs führt direkt zum CASSY-Menu. Die technischen Daten des CASSY-Grundsensors lauten:

- 5 analoge Eingangsbuchsen in 2 Feldern A und B, die gleichzeitig nutzbar sind.
  - **2 analoge Spannungseingänge** in den Feldern A und B.

    Auflösung: 12 bit; Messbereiche: ±(0,3 V, 1 V, 3 V, 1 V, 30 V und 100 V); Messfehler: ±1%, zuzüglich 0.5% vom Bereichsendwert; Eingangswiderstand: 1 MΩ; Abtastrate: bis 100 kHz pro Eingang.
  - **1 analoger Stromeingang** in Feld A;

    Messbereiche: ±(0,1 A, 0,3 A, 1 A und 3 A); Messfehler: Spannungsmessfehler zuzüglich 1%; Eingangswiderstand: <0,5 Ω (außer bei Überlast); weitere Daten siehe Spannungseingänge.
  - 2 analoge Eingänge auf **Sensorbox-Steckplätze**n in den Feldern A und B erlauben Anschluss aller CASSY-Sensorboxen;

    Messbereiche: ±(0,003 V, 0,01 V, 0,03 V, 0,1 V, 0,3 V und 1 V); Eingangswiderstand:

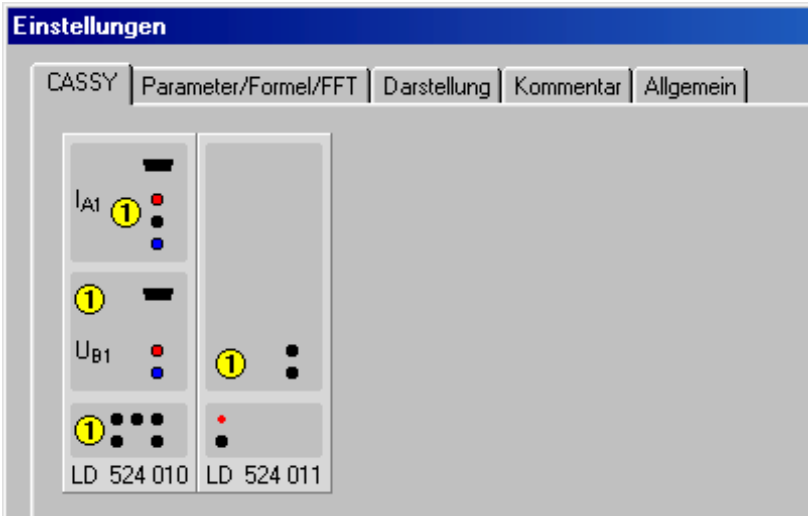
10 kΩ; Weitere Daten siehe Spannungseingänge; Technische Daten ändern sich entsprechend einer aufgesteckten Sensorbox. Erkennung der dann möglichen Messgrößen und Bereiche automatisch durch CASSY Lab nach Aufstecken einer Sensorbox.

- 1 Umschaltrelais (Schaltanzeige mit LED); Bereich: max. 100 V bzw. 2 A
- 1 analoger Ausgang (PWM-Ausgang), d.h. PulsWeitenModuliert zum Schalten von entsprechenden Geräten (z.B. für Haltemagnet oder Experimentversorgung); PWM-Bereich: 0% (aus), (5 – 95) % (1% Auflösung), 100% (an); PWM-Frequenz: 100 Hz
- 1 USB-Port zum Anschluss eines Computers
- 1 CASSY-Bus zum Anschluss weiterer CASSY-Module
- Abmessungen: 115 mm × 295 mm × 45 mm
- Masse: 1,0 kg

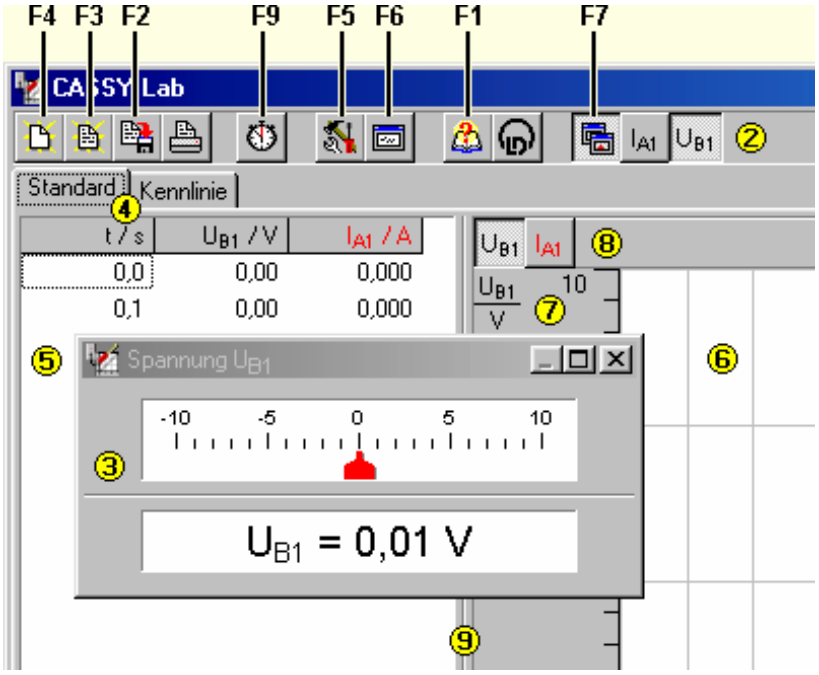
Gegenstück zum ADC sind DAC (Digital to Analogue Converters), die eine rechnergesteuerte Spannungsquelle darstellen. Die entnehmbare Leistung hängt von der Bauweise ab.

Erste Messwerte

Wenn ein oder mehrere CASSYs erkannt worden sind, zeigt die CASSY-Seite des Einstellungsfensters (**F5**) die aktuelle Konfiguration (mit eventuell aufgesteckten Sensorboxen). Um eine Messung durchzuführen, braucht nur der entsprechende Eingang oder Ausgang ① angeklickt zu werden:



Ein aktiver Ein- oder Ausgang (Kanal) wird danach farbig markiert und als Button rechts oben zu den Speed-Buttons ② des Hauptfensters einsortiert (hier I_{A1} und U_{B1}). Diese Buttons stellen die einfachste Möglichkeit dar, ein Anzeigeinstrument ③ des Kanals anzuzeigen oder zu schließen (linke Maustaste) oder seine Einstellungen zu verändern (rechte Maustaste). Außerdem erscheint der Kanal anfangs automatisch in der Tabelle ⑤ und im Diagramm ⑥.



Die grundsätzlichen Funktionen lassen sich gezielt mit den Speed-Buttons ② in der oberen Zeile ausführen. Die wichtigsten Speed-Buttons lassen sich auch mit den Funktionstasten bedienen.

Darunter lässt sich durch Anklicken einer der Darstellungsseiten ④ die Darstellung der Tabelle ⑤ und des Diagramms ⑥ umschalten, wenn unterschiedliche Darstellungsarten definiert wurden (hier **Standard** und **Kennlinie**). Tabelle und Diagramm können gegeneinander durch Verschieben der Trennlinie ⑨ mit der Maus vergrößert oder verkleinert werden.

An vielen Stellen haben **beide** Maustasten (links und rechts) eine entscheidende Funktion:

Bedienelement	**Linke Maustaste**	**Rechte Maustaste**
① CASSY-Anordnung	Anschalten und Ändern eines Kanals	Anschalten und Ändern eines Kanals
② Kanal-Button	Öffnen und Schließen des Anzeigeinstruments, Drag & Drop nach ② und ⑤ bis ⑧	Einstellungen des Kanals
③ Anzeigeinstrument	Verschieben der Trennlinie Analog- zu Digitalanzeige, Drag & Drop der Werte nach ⑤	Einstellungen des Kanals
④ Name der Darstellung	Umschalten in eine andere definierte Darstellung	
⑤ Tabelle	Editieren von Messwerten, Drag & Drop der Werte innerhalb der Tabelle oder der Kanäle nach ②	Darstellung der Tabelle, z. B. Schriftgröße, Löschen von Zeilen und Messreihen
⑥ Diagramm	Markieren von Auswertungsbereichen	Einstellungen und Auswertungen im Diagramm
⑦ Skala	Verschieben der Skala	Minimum, Maximum und Umrechnung der Skala festlegen
⑧ Achsensymbole	Umschalten der y-Skala, Drag & Drop nach ②	Einstellungen des Kanals
⑨ Trennlinie	Verschieben der Trennlinie Tabelle zu Diagramm	

Auch die Tastenbelegung der Speed-Buttons erleichtert oft die Arbeit:

F4
Löscht entweder die aktuelle Messung unter Beibehaltung ihrer Einstellungen oder, wenn keine Messung vorhanden ist, die aktuellen Einstellungen.

Eine zweimalige Anwendung löscht eine Messung mit ihren Einstellungen.

F3
Lädt eine Messreihe mit ihren Einstellungen und ihren Auswertungen.

Dabei kann die Messreihe auch an eine vorhandene Messreihe angehängt werden (ohne ihre Einstellungen und Auswertungen mit zu laden). Dies ist möglich, wenn die Messreihen die gleichen Messgrößen besitzen. Alternativ kann eine weitere Messreihe auch nachträglich gemessen und angehängt werden.

Außerdem steht ein ASCII-Import-Filter (Dateityp ***.txt**) zur Verfügung.

F2
Speichert die aktuellen Messreihen mit ihren Einstellungen und ihren Auswertungen ab.

Es lassen sich auch reine Einstellungen (ohne Messdaten) abspeichern, mit denen dann später ein Experiment einfach wiederholt werden kann.

Außerdem steht ein ASCII-Export-Filter (Dateityp ***.txt**) zur Verfügung. Aber auch die CASSY Lab-Dateien (Dateityp ***.lab**) sind mit jedem Texteditor lesbar.

Druckt die aktuelle Tabelle oder das aktuelle Diagramm aus.

F9
Startet und stoppt eine neue Messung.

Alternativ kann die Messung durch die Vorgabe einer Messzeit gestoppt werden.

F5
Ändert die aktuellen Einstellungen (z. B. CASSY, Parameter/Formel/FFT, Darstellung, Kommentar, Serielle Schnittstelle). Für die Messparameter muss diese Funktion **doppelt** betätigt werden.

F6
Stellt den Inhalt der Statuszeile groß dar oder blendet ihn wieder aus.

F1
Ruft diese Hilfe auf.

Gibt Auskunft über die Version der Software und ermöglicht die Eingabe des Freischaltcodes.

F7
Schließt alle geöffneten Anzeigeinstrumente oder öffnet sie wieder.

ASCII-Export und Import

Wählt man im Dateiauswahlfenster als Dateityp ***.txt**, dann ist bequem der Export- und Import von ASCII-Dateien möglich.

Das Datenformat beginnt mit einem Header, in dem alle Zeilen wiederum mit einem Schlüsselwort beginnen. Dadurch werden Messbereiche (MIN, MAX), Skalierungen (SCALE), Anzahl signifikanter Nachkommastellen (DEC) und die eigentliche Definition der Messgrößen (DEF) festgelegt. Bis auf die DEF-Zeile sind alle Zeilen optional. Nach dem Header folgt die eigentliche Messwerttabelle.

Die genaue Syntax ist z. B. der Datei anzusehen, die bei einem Datenexport entsteht.

Statuszeile

In die Statuszeile am unteren Bildschirmrand werden Auswertungsergebnisse eingetragen. Diese Ergebnisse lassen sich durch Drücken von oder **F6** auch in einem größeren Fenster darstellen bzw. wieder ausblenden.

Drag & Drop

Die Auswertungsergebnisse der Statuszeile lassen sich mit der Maus in die Tabelle ziehen (Drag & Drop). Auf diese Weise lassen sich Diagramme erstellen, die von Auswertungsergebnissen abhängen.

© Leybold-Didactic GmbH

Anhang A4

Darstellung von Wechselströmen und -spannungen im Zeigerdiagramm

Für die Darstellung und Berechnung von Wechselstromkreisen sind sogenannte Zeigerdiagramme sehr von Nutzen. Dies sind instruktive grafische Darstellungen der Momentanwerte der zeitabhängigen Größen Spannung und Strom einerseits sowie der linearen Netzwerke aus Ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten durch zweidimensionale Vektoren („Zeiger"). Diese Zeiger lassen sich als Darstellungen komplexer Zahlen in der Gaussschen Zahlenebene auffassen. Spannungen und Ströme werden durch die zeitabhängigen komplexen Zahlen $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ und $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ beschrieben. Deren Realteile liefern die beobachtbaren sinusförmigen Verläufe. Impedanzen von linearen Netzwerken sind zeitunabhängige komplexe Zahlen.

A4.1 Zusammenhang von Strom und Spannung in linearen Netzwerken aus Ohmschem Widerstand, Kondensator und Spule

a) **Ohmscher Widerstand** (Abb. A4.1a)

Legt man an einen Ohmschen Widerstand R eine cosinusförmige Wechselspannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ an, so fließt der Strom $I = I_0 \cos(\omega t)$ mit $I_0 = U_0/R$. Die Scheitelwerte U_0, I_0 von Strom und Spannung sind einander proportional, und **die zeitlichen Phasenlagen beider sind gleich.**

b) **Kapazität (Kondensator)** (Abb. A4.1b)

Ein Kondensator der Kapazität C trägt die Ladung $Q = CU$. Mit $U = U_0 \cos(\omega t)$ und $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ folgt $I = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\omega C U_0 \sin(\omega t)$. Dies formen wir um zu $I = I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ mit $I_0 = \omega C U_0$. Wie beim Ohmschen Widerstand sind die Scheitelwerte von Strom und Spannung einander proportional, aber **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode nach.** Die frequenzabhängige Größe

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

spielt die Rolle eines Widerstandes und wird als **Wechselstromwiderstand einer Kapazität** bezeichnet. Ein Kondensator hat also bei niedrigen Frequenzen einen großen, bei hohen einen kleinen Wechselstromwiderstand.

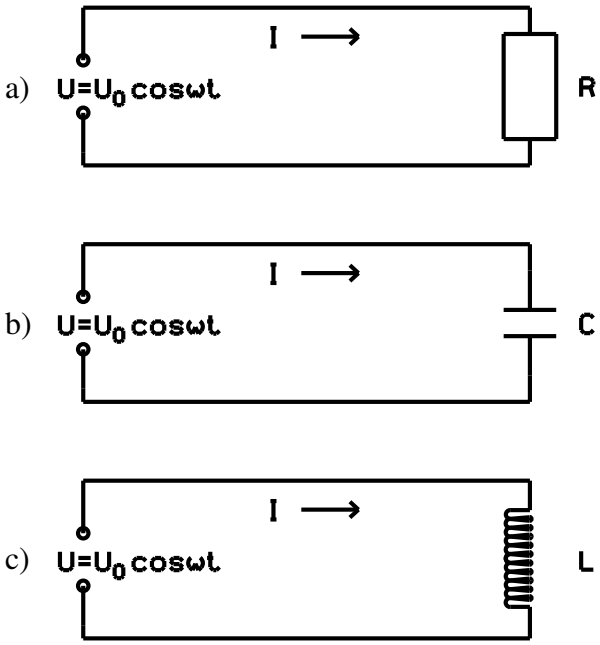


Abbildung A4.1: Netzmaschen für ideale Impedanzen.

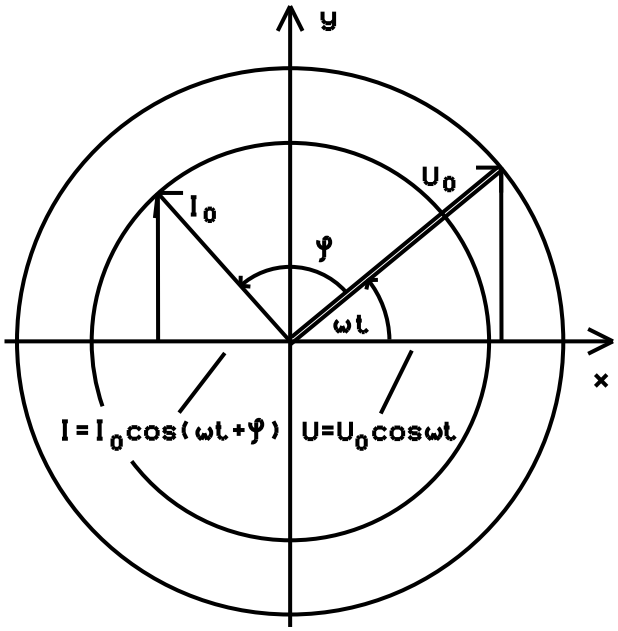


Abbildung A4.2: Prinzip des Zeigerdiagramms.

c) **Induktivität (widerstandslose Spule)** (Abb. A4.1c)

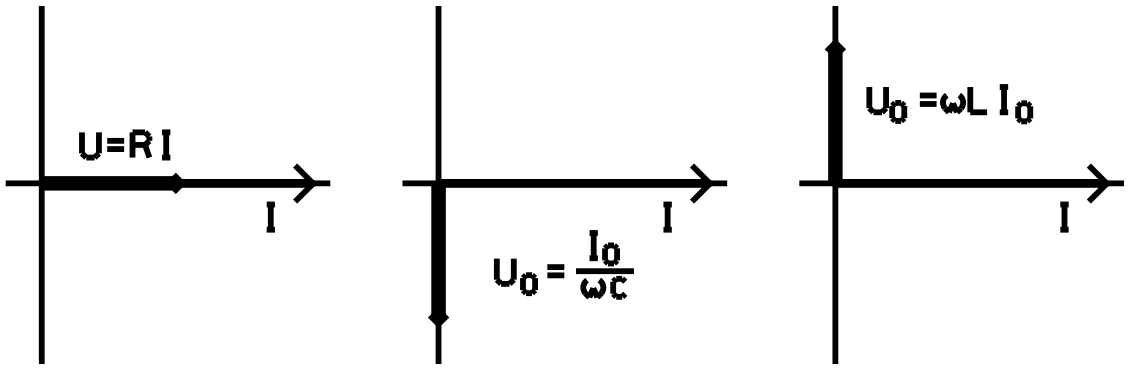
Der durch eine Spule fließende Strom I erzeugt in ihrer Windungsfläche den magnetischen Fluss $\Phi = LI$. Der Faktor L heißt die Induktivität der Spule. Ist I zeitabhängig, so wird zwischen den Enden der Spule eine Spannung $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ induziert. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz gilt für die Summe der Spannungen im Kreis $U + U_{\text{ind}} = RI$, und wenn wir $R = 0$ setzen (ideale widerstandslose Spule), folgt $U = +L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. Dies können wir für $U = U_0 \cos(\omega t)$ durch $I = U_0/(\omega L)\sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$ mit $I_0 = U_0/(\omega L)$ erfüllen.
Die Scheitelwerte von Strom und Spannung sind einander proportional, **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode vor**. Der **Wechselstromwiderstand einer Induktivität**

$$Z_L = \omega L$$

steigt proportional zur Frequenz an.

A4.2 Zeigerdiagramme

Das Zeigerdiagramm bildet ein bequemes und anschauliches Mittel zur Darstellung und Berechnung der Beziehung zwischen Strom und Spannung in Serien- und Parallelschaltungen (sog. linearen Netzwerken). In linearen Netzwerken besteht einerseits **Proportionalität** zwischen einer anliegenden cosinusförmigen Wechselspannung und dem resultierenden Strom, andererseits besteht zwischen Spannung und Strom eine feste, i.a. jedoch von Null verschiedene **Phasenverschiebung**.



a) b) c)

Abbildung A4.3: Zeigerdiagramm a) des Ohmschen Widerstands, b) der Kapazität, c) der Induktivität. Gezeichnet ist jeweils das Zeigerdiagramm für den Zeitpunkt, in dem I seinen Scheitelwert I_0 annimmt.

Man stellt die Beziehungen zwischen Beträgen und Phasen der Ströme und Spannungen im **Zeigerdiagramm** dar (siehe Abb. A4.2), indem man U und I in der xy-Ebene durch Zeiger der Länge U_0 bzw. I_0 repräsentiert. (Da U und I in verschiedenen Einheiten gemessen werden, kann für jede der beiden Größen zeichnerisch zunächst ein beliebiger Maßstab gewählt werden. Die Längen verschiedener Stromzeiger (bzw. verschiedener Spannungszeiger) müssen sich jedoch untereinander verhalten wie die zugehörigen Scheitelwerte (Amplituden).) Diese Zeiger rotieren mit der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn. Der von der positiven x-Achse linksherum (im Bogenmaß) zum Zeiger gemessene Winkel stellt die jeweilige momentane Phase dar. Die Projektion des Zeigers auf die x-Achse gibt dann den zugehörigen Momentanwert von Strom bzw. Spannung an. Haben U und I eine feste Phasenverschiebung relativ zueinander, dann bilden die entsprechenden Zeiger ein in sich starres, gleichmäßig rotierendes Gerüst. Für die Darstellung der **relativen** Phasen- und Amplitudenbeziehungen ist es daher gleichgültig, für welchen Zeitpunkt das Zeigerdiagramm gezeichnet wird.

Die in Abschnitt A4.1 hergeleiteten Zusammenhänge zwischen U und I stellen sich im Zeigerdiagramm (Abb. A4.3) folgendermaßen dar:

a) **Ohmscher Widerstand** (Abb. A4.3a):

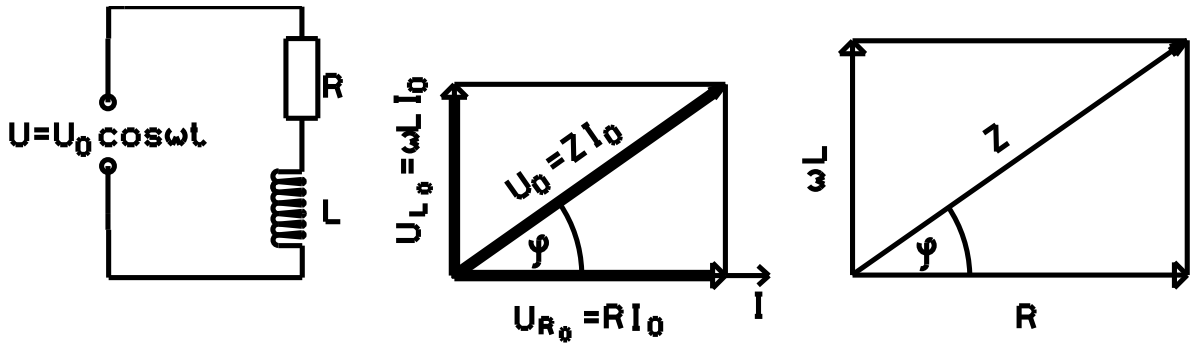
   Strom- und Spannungszeiger sind parallel. Der Spannungszeiger ist R-mal so lang wie der Stromzeiger (in den jeweiligen, zeichnerisch beliebigen Einheiten).

b) **Kapazität** (Abb. A4.3b):

   Beide Zeiger bilden einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **nach**eilt, also z.B. nach unten zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist $Z_C = 1/\omega C$ mal so lang wie der Stromzeiger.

c) **Induktivität** (Abb. A4.3c):

   Beide Zeiger bilden einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **vor**eilt, also z.B. nach oben zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist $Z_L = \omega L$ mal so lang wie der Stromzeiger.



a) Schaltung b) Spannungs-Zeigerdiagramm c) Impedanz-Zeigerdiagramm

Abbildung A4.4: Beispiel einer Serienschaltung: R und L in Serie (reale Spule).

A4.2.1 Serienschaltung

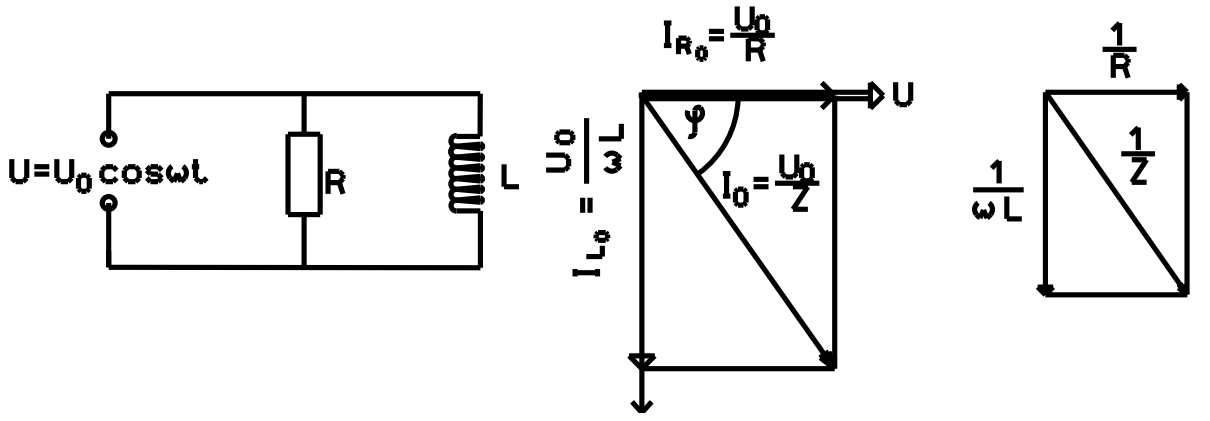
Durch alle Elemente einer Serienschaltung fließt derselbe Strom nach Betrag und Phase (sonst müßten sich auf den Leitungen Ladungen zeitweise ansammeln oder von dort verschwinden). Wir können also in **ein** Diagramm den gemeinsamen Stromzeiger und die Spannungszeiger der einzelnen Elemente, deren Relation zum Stromzeiger wir kennengelernt haben, eintragen. Die über alle in Reihe liegenden Elemente insgesamt abfallende momentane Spannung ist die Summe der Projektionen der einzelnen Spannungszeiger auf die x-Achse. Selbstverständlich dürfen nur gleichartige Größen summiert werden, z.B. Ströme nur zu Strömen. Da die Summe der Projektionen der Zeiger gleich der Projektion ihrer Vektorsumme ist, und zwar für alle ωt, gibt der Summenzeiger nach Länge und Orientierung den Betrag der gesamten Spannung und ihre Phase relativ zum Stromzeiger an. Mit dem ganzen Zeigergerüst rotiert auch der Zeiger der Gesamtspannung gleichmäßig linksherum. Das Diagramm zeigt jeweils einen beliebig herausgegriffenen Augenblick dieser Bewegung (im Beispiel der Abb. A4.4 den Moment, wenn I seinen Scheitelwert I_0 annimmt).

Da die Zeiger der Teilspannungen dem Betrage nach sämtlich proportional zu I_0 sind, gilt dies auch für den Betrag des Summenvektors:

$$|U| = U_0 = ZI_0.$$

Z ist der Wechselstromwiderstand der gesamten Reihenschaltung. Z und der Phasenwinkel φ zwischen Gesamtspannung und Strom lassen sich aus dem Zeigerdiagramm mit Hilfe einfacher trigonometrischer Beziehungen berechnen.

Teilen wir alle Spannungszeiger durch I_0, so erhalten wir das dem Spannungszeigerdiagramm geometrisch ähnliche **Zeigerdiagramm der Wechselstromwiderstände**. Wir lesen aus Abb. A4.4 ab: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ und $\tan(\varphi) = \omega L/R$. Die Spannung eilt dem Strom um den Winkel φ voraus. Die Teilspannungen an R und L sind beide weder miteinander noch mit der gesamten Spannung in Phase.



a) Schaltung b) Strom-Zeigerdiagramm c) Leitwert-Zeigerdiagramm

Abbildung A4.5: Beispiel einer Parallelschaltung: Ohmscher Widerstand und Spule.

A4.2.2 Parallelschaltung

An allen parallelen Zweigen der Schaltung liegt dieselbe Spannung an. Man kann daher in **ein** Diagramm den gemeinsamen Spannungszeiger und die Stromzeiger der einzelnen Zweige eintragen. Der Zeiger des insgesamt fließenden Stroms ergibt sich durch vektorielle Addition dieser Stromzeiger und liegt damit nach Betrag und Phase relativ zum Spannungszeiger fest.

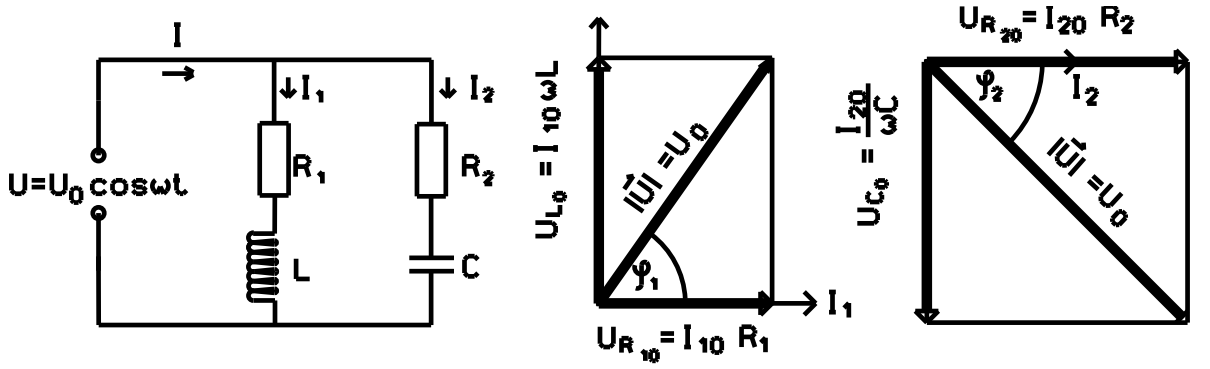
Dem Stromzeigerdiagramm in Abb. A4.5 geometrisch ähnlich ist das **Zeigerdiagramm der Wechselstromleitwerte**, das aus ihm mittels Division durch U_0 hervorgeht. Aus Abb. A4.5 ergeben sich:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}; \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \tan(\varphi) = \frac{R}{\omega L}.$$

Wiederum sind die Teilströme weder untereinander noch mit dem Gesamtstrom in Phase.

A4.3 Komplizierte Netzwerke

Besteht ein Netzwerk aus Parallel- und/oder Reihenschaltungen von Unterabschnitten, die ihrerseits wieder Parallel- und/oder Reihenschaltung der drei Grund-Schaltelemente sind, so muss man zunächst Zeigerdiagramme solcher Unterabschnitte konstruieren und an ihnen die Beziehungen zwischen den zugehörigen Teilspannungen und -strömen ermitteln. Die hierbei im jeweiligen Diagramm vorzugebenden Größen (bei Reihenschaltung der Strom, bei Parallelschaltung die Spannung) sind vorläufig nach Betrag und Phase relativ zu der die ganze Schaltung treibenden Spannung noch unbekannt. Die Maßstäbe dieser Teildiagramme sind zunächst beliebig und deshalb im Allgemeinen verschieden, und auch die dargestellten Zeitpunkte stimmen i.A. nicht überein. Diese Teildiagramme sind nun zum Gesamtdiagramm zusammenzufügen, wobei sie so gedreht (Transformation des Zeitpunkts) und im Maßstab verändert werden müssen, dass durch alle mit-



a) Schaltung b) Spannungsdiagramm Zweig 1 c) Spannungsdiagramm Zweig 2

Abbildung A4.6: Schwingkreis mit Spule, Ohmschen Widerstand und Kondensator

einander in Reihe liegenden Teildiagramme derselbe Strom nach Betrag und Phase fließt und an allen parallel liegenden Teilzweigen dieselbe Spannung liegt.

Am Beispiel eines Parallelschwingkreises mit zwei Ohmschen Widerständen soll das verdeutlicht werden: Beide Diagramme in Abb. A4.6 b),c) müssen so gedreht und maßstäblich angepasst werden, dass die Zeiger $\vec{U}$ zur Deckung kommen, da an beiden Zweigen dieselbe Spannung anliegt. Dabei ergibt sich automatisch die relative Lage und Größe von I_1, I_2 und auch der Zeiger des gesamten Stroms $\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$. Wegen der rechten Winkel in den Teildiagrammen liegen die Eckpunkte auf einem Thaleskreis vom Durchmesser U_0. Mittels trigonometrischer Formeln können I_1, I_2 und deren Phasenwinkel bestimmt werden (Abb. A4.7).

A4.4 Komplexe Wechselstromgrößen

A4.4.1 Rechnerische Behandlung von Impedanz-Netzwerken

Der grafischen Darstellung im Zeigerdiagramm entspricht rechnerisch die Darstellung von Strömen, Spannungen und Wechselstromwiderständen durch komplexe Zahlen $z = x + iy$ (Punkte in der komplexen Zahlenebene). Hierbei ist das i das Symbol für $\sqrt{-1}$. (In der elektrotechnischen Literatur schreibt man wegen der häufigen Verwendung des kleinen Buchstabens i zur Bezeichnung von Strömen meist $j = \sqrt{-1}$).

Aus der Beziehung $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ folgt $|e^{i\omega t}| = 1$, d.h. der Vektor vom Ursprung der Zahlenebene zum Punkt $e^{i\omega t} = (\cos\omega t, \sin(\omega t))$ hat die Länge 1 und bildet mit der x-Achse (reellen Achse) den Winkel ωt. Mit wachsendem ωt läuft der Punkt $e^{i\omega t}$ im negativen Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis um. Entsprechend läuft $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf dem Kreis vom Radius U_0 um, wobei die Projektion auf die x-Achse (der Realteil $Re\hat{U}$) gleich $U_0\cos(\omega t)$ ist.

Betrachten wir nun Strom und Spannung an einer Kapazität (Abb. A4.3b)). Fassen wir die Spannung $U = U_0\cos(\omega t)$ als Realteil von $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf, so ergibt sich I als $I = U_0\omega C\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$, was wir als Realteil von $\hat{I} = I_0 e^{i(\omega t+\pi/2)} = \omega C e^{i\pi/2} U_0 e^{i\omega t}$ deuten können. Mit $e^{i\pi/2} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$

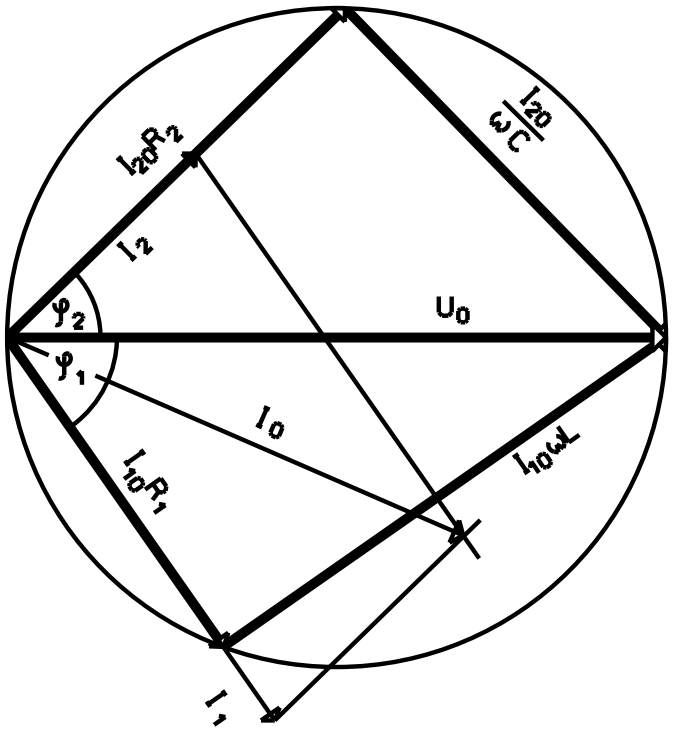


Abbildung A4.7: Zeigerdiagramm für Parallelschwingkreis

wird daraus

$$\hat{I} = i\omega C\hat{U}.$$

Die Beziehung zwischen Strom und Spannung am Kondensator lässt sich also als **Realteil einer Gleichung zwischen komplexen Größen, die völlig analog dem** Ohm**schen Gesetz** $I = (1/R)U$ **ist** auffassen, wobei an die Stelle des Ohmschen Widerstandes R der sog. **Scheinwiderstand** (komplexer Widerstand, **Impedanz**) der Kapazität, $\hat{Z} = 1/(i\omega C) = -i/(\omega C)$, tritt. Als komplexe Zahl stellt die Impedanz grundsätzlich ein Paar reeller Zahlen dar und kann die Information über den Proportionalitätsfaktor zwischen den Scheitelwerten von Strom und Spannung (Wechselstromwiderstand) wie auch über die Phasenbeziehung aufnehmen. Der Vorteil der komplexen Rechnung liegt darin, dass die Phasenkonstante in den **multiplikativen** Faktor $\hat{Z}$ eingeschlossen ist und nicht mehr explizit gehandhabt zu werden braucht, was wegen der Additionstheoreme für sin und cos die Berechnung selbst einfacher Schaltkreise im Reellen außerordentlich umständlich machen würde.

Üblicherweise dividiert man beide Seiten der Gleichung $\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}$ durch $e^{i\omega t}$, da dieser Faktor lediglich die gleichmäßige Rotation der Vektoren $\hat{U}$ und $\hat{I}$ in der Gaussschen Zahlenebene beschreibt. Wir werden unter $\hat{U}$ und $\hat{I}$ im folgenden also feste Vektoren verstehen, von denen wir einen (z.B. die treibende Spannung einer Schaltung) reell annehmen können.

Ganz analoge Betrachtungen wie bei der Kapazität liefern die Impedanzen der Induktivität und

des Ohmschen Widerstandes. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_R &= R && \text{für den Ohmschen Widerstand,} \\ \hat{Z}_C &= \frac{1}{i\omega C} && \text{für die Kapazität,} \\ \hat{Z}_L &= i\omega L && \text{für die Induktivität.} \end{aligned}$$

und als komplexe Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes

$$\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}.$$

$\hat{Z}$ wird als Scheinwiderstand oder Impedanz, sein Realteil als **Wirkwiderstand**, sein Imaginärteil als **Blindwiderstand** bezeichnet. Der Betrag $|\hat{Z}| = Z$ heißt Wechselstromwiderstand.

Weil diese Beziehung formal dem Ohmschen Gesetz gleicht und weil die Kirchoffschen Gesetze auch für Wechselströme und -spannungen gelten, erhalten wir für die Reihen- bzw. Parallelschaltung von Impedanzen dieselben Regeln wie für entsprechende Kombinationen Ohmscher Widerstände:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{\text{ges}} &= \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 && \text{für Reihenschaltungen,} \\ \frac{1}{\hat{Z}_{\text{ges}}} &= \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} && \text{für Parallelschaltungen.} \end{aligned}$$

Beliebige Netzwerke aus Impedanzen werden daher formal-rechnerisch völlig analog der entsprechenden Schaltung aus Ohmschen Widerständen behandelt. Die Zeigerdiagramme für Strom, Spannung, Impedanz oder reziproke Impedanz sind nichts anderes als grafische Darstellung der hierbei auftretenden Operationen mit komplexen Größen in der Gaussschen Zahlenebene

Natürlich ist dieser Formalismus nur eine zweckmäßige, weil vereinfachende Rechenvorschrift. Ströme und Spannungen sind reelle Funktionen, d.h. zu jedem Zeitpunkt durch Angabe jeweils einer reellen Zahl in geeigneten Einheiten messbare Größen. Wir können diese Funktionen erhalten, indem wir am Schluss der komplexen Rechnung $\hat{I}$ und $\hat{U}$ wieder mit dem Faktor $e^{i\omega t}$ multiplizieren und die Realteile dieser komplexen Zahlen bilden. Wir können stattdessen aber auch die eigentlich interessierenden Kenngrößen, nämlich Amplitude und Phase, direkt aus den komplexen Repräsentanten $\hat{I}$ bzw. $\hat{U}$ gewinnen. Setzen wir etwa in $\hat{I} = \hat{Z}\hat{U}$ die Spannung reell an (womit wir t festgelegt haben), so ist die **Amplitude** I_0 durch den **Betrag** $I_0 = |\hat{I}| = \sqrt{(Re\ \hat{I})^2 + (Im\ \hat{I})^2}$ und die **Phase** φ durch das **Argument** von $\hat{I}$, $\tan\varphi = \frac{Im\ \hat{I}}{Re\ \hat{I}}$, gegeben. (Das so berechnete φ ist der Phasenwinkel bezüglich der reellen Achse und stimmt nur dann mit der Phasenverschiebung gegen U überein, wenn U reell angesetzt wird.)

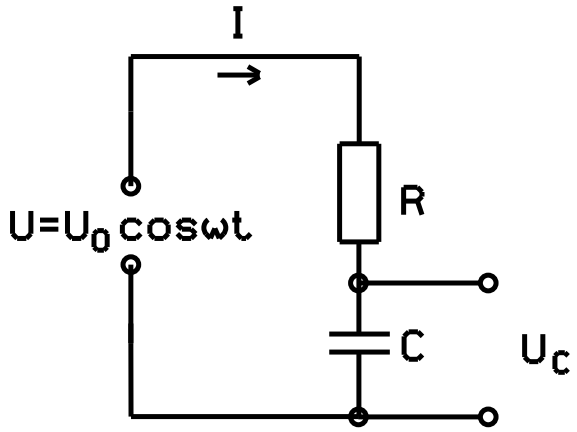


Abbildung A4.8: Frequenzabhängige Spannungsteilung.

Beispiel: Rechnung beim *RC*-Spannungsteiler (Tiefpass, s. Abb. A4.8)

$$\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} = \frac{1/i\omega C}{R + 1/i\omega C} = \frac{1}{1 + iR\omega C} = \frac{1 - iR\omega C}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$U_{0,C} = \left|\hat{U}_C\right| = \left|\frac{1}{1 + iR\omega C}\right| \cdot U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{-R\omega C/(1 + (\omega RC)^2)}{1/(1 + (\omega RC)^2)} = -\frac{\omega RC}{1} = -\omega RC$$

U_C eilt U um den Winkel $-\varphi$ nach:

$$U_C = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC)).$$

A4.4.2 Leistung in komplexer Schreibweise

Die komplexe Behandlung führt zu Schwierigkeiten bei der Berechnung der Leistung im Wechselstromkreis, weil hierzu quadratische Größen der Repräsentanten gebildet werden. Man muss deshalb vor der Leistungsberechnung zu reellen Größen übergehen oder aber besondere Festsetzungen treffen.

Bezeichnen wir mit $\hat{I}^*$ den zu $\hat{I} = \hat{U}/(|\hat{Z}|e^{i\varphi}) = I_0 e^{-i\varphi}$ komplex konjugierten Strom $\hat{I}^* = I_0 e^{+i\varphi}$, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}^* = \frac{U_0 I_0}{2} e^{i\varphi} &= \frac{U_0 I_0}{2}\cos(\varphi) + i\frac{U_0 I_0}{2}\sin(\varphi) \\ &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) + iU_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Hierin sind $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ und $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ die **Effektivwerte** von Spannung und Strom (diese

Werte werden üblicherweise von Wechselstrom-Messinstrumenten angezeigt). Mithin ist

$$\frac{1}{2}Re(\hat{U}\hat{I}^*) = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\varphi),$$

d.h. gleich der mittleren Wirkleistung

$$\overline{N_{\text{w}}} = \overline{U_0\cos(\omega t)I_0\cos(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{2}U_0I_0\cos(\varphi).$$

Die mittlere Wirkleistung berechnet man also in komplexer Schreibweise nach der Vorschrift:

$$\overline{N_{\text{w}}} = \frac{1}{2}Re(\hat{U}\hat{I}^*).$$

Anhang A5

Optische Instrumente

A5.1 Auge

Machen Sie sich bei der Vorbereitung zu Versuch N62 mit dem Aufbau und der Funktionsweise des menschlichen Auges vertraut. Dazu einige Angaben:

Brechzahl der Linse:	$n_L = 1{,}358$ (Wasser hat n = 1,33),
Brechzahl des Glaskörpers:	$n_C = 1{,}3365$,
Sehzellendichte:	$\zeta = 42\,000/\text{mm}^2$.

Sehwinkel: Die Bildgröße B des Gegenstandes G auf der Netzhaut des Auges ist proportional zum „Sehwinkel“ ε (siehe Abb. A5.1). Die kleinste deutliche Sehweite des Auges beträgt im Mittel $s_0 := 25\,\text{cm}$. (Bestimmen Sie Ihre persönliche deutliche Sehweite; sie kann sehr unterschiedlich sein und hängt von Ihrem Alter ab und z.B. davon, ob und wie stark Sie kurzsichtig sind; als Standard wird jedoch immer $s_0 = 25\,\text{cm}$ verwendet.) Der maximale Sehwinkel ε_0 des menschlichen Auges, unter dem ein Gegenstand G scharf erscheinen kann, ist daher gegeben durch

$$\tan(\varepsilon_0) = \frac{G}{s_0}. \tag{A5.1}$$

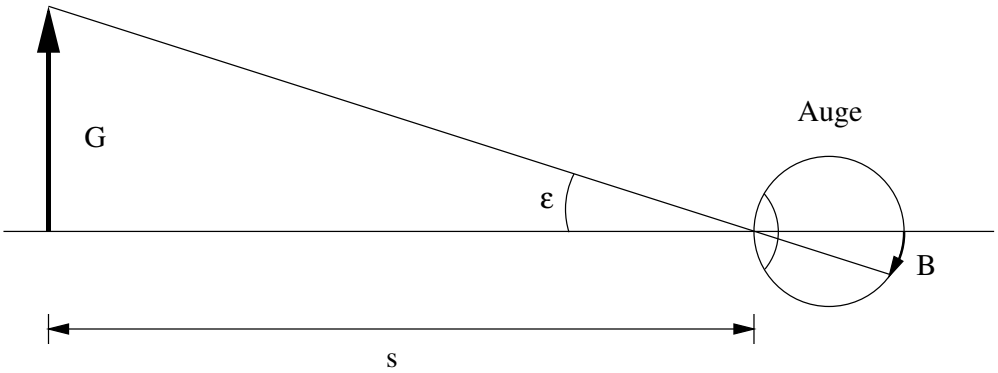


Abbildung A5.1: Zur Definition des Sehwinkels

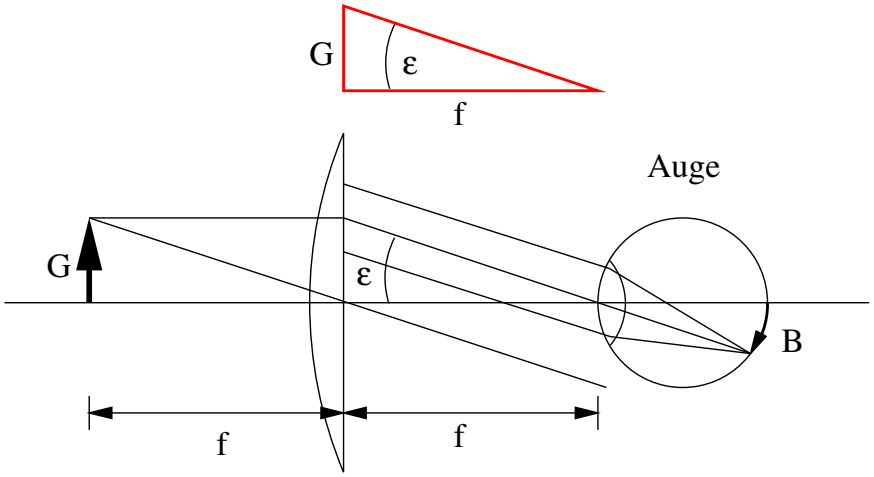


Abbildung A5.2: Strahlengang der Lupe.

A5.2 Lupe

Das einfachste optische Instrument zur Vergrößerung des Sehwinkels ist die Lupe. Es ist eine Sammellinse (Brennweite f), die auf eine der beiden folgenden Arten verstanden und verwendet werden kann:

1. Der durch die Lupe betrachtete Gegenstand befindet sich in der Brennebene der Sammellinse. Das Auge ist auf ∞ akkomodiert. In der in Abb. A5.2 gezeigten Anordnung treten alle vom Gegenstand ausgehenden Lichtbündel als Parallellicht aus der Linse aus. Das Auge sieht ein virtuelles Bild des Gegenstandes, welches im ∞ liegt. Der Gegenstand erscheint, wie man aus der Zeichnung einfach ablesen kann, unter dem Sehwinkel gemäß Abb. A5.1.

   Die **Vergrößerung** eines optischen Instrumentes ist definiert als ein Tangensverhältnis:

$$v := \frac{\tan(\text{Sehwinkel mit Instrument})}{\tan(\text{maximal möglicher Sehwinkel ohne Instrument})}, \tag{A5.2}$$

   wobei maximal möglicher Sehwinkel bei „greifbaren“ Gegenständen bedeutet, dass man sie aus s_0 betrachtet, und bei „nicht greifbaren“ Gegenständen (z.B. Sternen) ihr tatsächlicher Sehwinkel gemeint ist.

   Als Vergrößerung einer Lupe definiert man also das Verhältnis:

$$v_L = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}. \tag{A5.3}$$

   Diese Anwendung der Lupe wird beim Okular verwendet (s.u.). Der Abstand Lupe – Auge ist unkritisch, da alle Lichtstrahlen vom Objekt idealerweise parallel austreten. Wird der Abstand Lupe – Objekt nicht genau eingehalten, so kann das Auge dafür in gewissem Rahmen durch Akkomodation kompensieren. Man kann deshalb oft von diesem Standardfall ausgehen.

2. Die Lupe befindet sich in sehr kleinem Abstand vor der Augenlinse. Der Vorteil dieser Geometrie ist, dass das Gesichtsfeld größer (= man sieht mehr vom betrachteten Gegenstand) ist als im vorherigen Fall (beliebiger Abstand Lupe – Auge). Hier wird die Brennweite des Auges praktisch verkleinert, und Gegenstände können auch in einer Entfernung kleiner als s_0 scharf gesehen werden. Das Bild auf der Netzhaut erscheint so größer, als es ohne Lupe möglich wäre.

   Die Vergrößerung beträgt

$$v_L = 1 + \frac{s_0}{f} \qquad \text{(Herleitung s. z.B. Otten, Kap. 28.1.).} \tag{A5.4}$$

   Man kann diesen Fall natürlich auch so sehen, dass die deutliche Sehweite reduziert wird. Auf jeden Fall gilt: je kleiner die Brennweite der Lupe, desto größer ist die Vergrößerung.

Frage: Warum ist die Definition der Vergrößerung über den Abbildungsmaßstab $\gamma = B/G$ bei Lupe, Fernrohr und Mikroskop nicht sinnvoll?

Frage: Was ist die maximale Vergrößerung, die mit einer Lupe erreicht werden kann, und wodurch ist sie begrenzt?

A5.3 Mikroskop

Wesentlich stärkere Vergrößerungen als mit der Lupe erreicht man durch Einsatz einer zweiten, sogenannten Objektivlinse. Beim Mikroskop nimmt man dafür eine Linse mit relativ kleiner Brennweite. Mit ihr erzeugt man ein vergrößertes, reelles Zwischenbild B_z, welches mit dem Okular, das wie eine Lupe funktioniert, weiter vergrößert wird. Die Verhältnisse sind in Abb. A5.3 verdeutlicht. Die wichtige Beziehung

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B_z}{T} \tag{A5.5}$$

kann man direkt der Zeichnung entnehmen. Es folgt für den Sehwinkel

$$\tan(\varepsilon) = \frac{B_z}{f_2} = \frac{T \cdot G}{f_1 \cdot f_2}. \tag{A5.6}$$

Die Vergrößerung des Mikroskops ist dann

$$v = \frac{\frac{T \cdot G}{f_1 \cdot f_2}}{\frac{G}{s_0}} = \frac{T}{f_1} \cdot \frac{s_0}{f_2} = v_{obj} \cdot v_{oku} \tag{A5.7}$$

das Produkt aus Objektiv- und Okularvergrößerung. Auch hier gilt; je kleiner die Objektivbrennweite, desto größer ist die Vergrößerung.

Frage: Wo ist hier die Grenze?

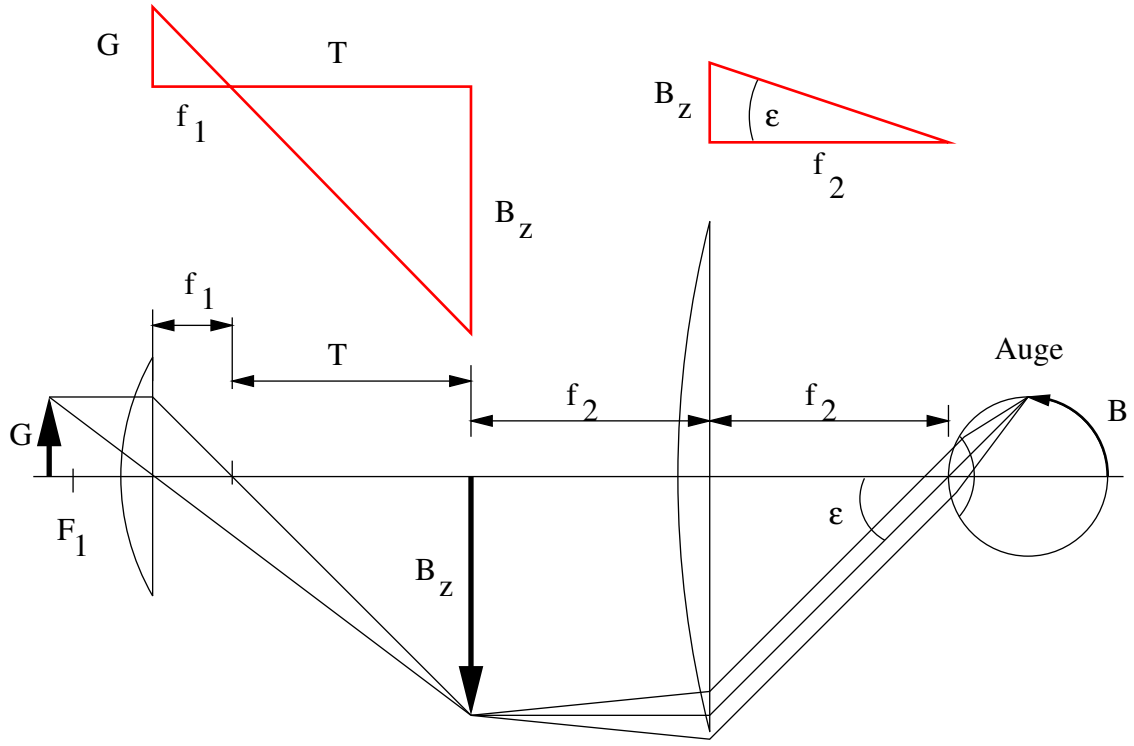


Abbildung A5.3: Strahlengang im Mikroskop (T = Tubuslänge)

A5.4 Astronomisches oder Keplersches Fernrohr

Die Verhältnisse beim astronomischen Fernrohr (zuerst beschrieben von J. Kepler 1611; gebaut von C. Schreiner 1615) sind ganz ähnlich wie beim Mikroskop; das Prinzip ist dasselbe. Der Unterschied kommt daher, dass der Gegenstand „∞ weit“ entfernt ist und sich deshalb die Tubuslänge T zu Null reduziert. Die Brennpunkte von Objektiv und Okular fallen also zusammen. In dieser Brennebene entsteht das reelle Zwischenbild vom betrachteten Gegenstand.

Die wichtigste Beziehung kann auch hier wieder aus der Zeichnung (Abb. A5.4) abgelesen werden:

$$\tan(\varepsilon_0) = \frac{B_z}{f_1} \qquad \text{und} \qquad \tan(\varepsilon) = \frac{B_z}{f_2}. \tag{A5.8}$$

Die Vergrößerung ist also

$$v = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{f_1}{f_2}. \tag{A5.9}$$

Beim Fernrohr ist es also sinnvoll, eine möglichst lange Objektivbrennweite zu nehmen, um die Vergrößerung möglichst groß zu machen.

Prinzipiell gibt es beim Fernrohr keine maximale Vergößerung, da die Brennweite des Objektivs (abgesehen von der großen Baulänge) beliebig groß gemacht werden kann. Beschränkungen beim Fernrohr kommen daher von dem endlichen Objektivdurchmesser, welcher die Auflösung begrenzt. Diesen Effekt untersuchen Sie in Versuch N62, Teil „Auflösungsvermögen von Linsen“.

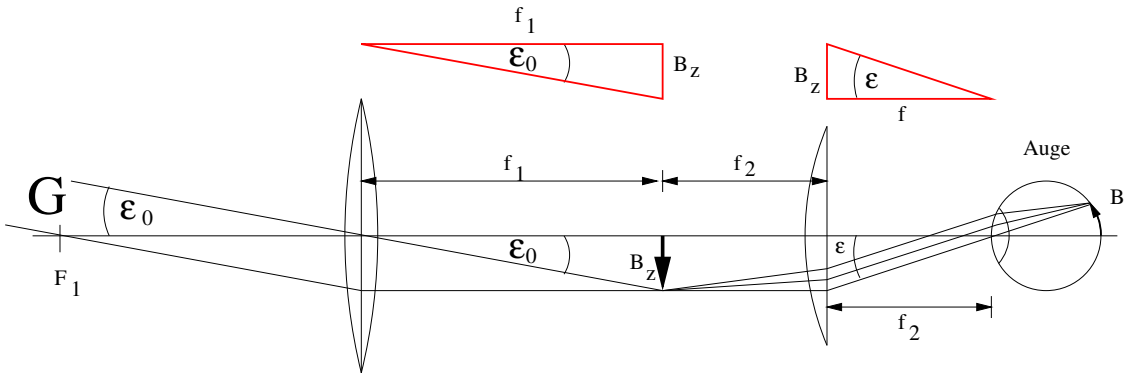


Abbildung A5.4: Strahlengang im astronomischen Fernrohr.

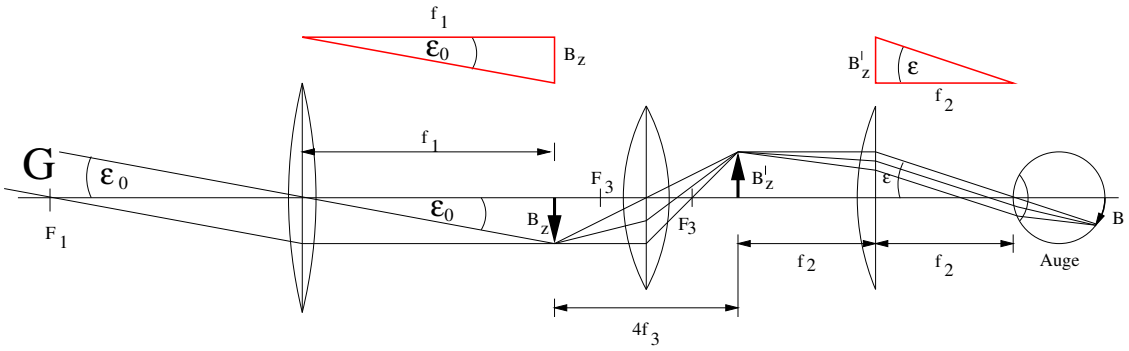


Abbildung A5.5: Strahlengang im terrestrischen Fernrohr.

A5.5 Terrestrisches Fernrohr

Zur Betrachtung eines Gegenstandes auf der Erde eignet sich ein astronomisches Fernrohr schlecht, da es auf dem Kopf stehende Bilder erzeugt. Das terrestrische Fernrohr vermeidet dies dadurch, dass sich zwischen Objektiv und Okular eine Sammellinse befindet, welche das Bild umkehrt. Im Vergleich zum astronomischen Fernrohr erfordert die „Umkehrlinse“ (f_3) eine größere Baulänge ℓ des terrestrischen Fernrohrs:

$$\ell = f_1 + f_2 + 4 \cdot f_3. \tag{A5.10}$$

Diese kann insbesondere für große Vergrößerungen beachtliche Werte erreichen. Der Strahlengang ist in Abb. A5.5 dargestellt.

Frage: Wie kann die Baulänge z.B. für einen Feldstecher reduziert werden?

A5.6 Galileisches Fernrohr (Theaterglas)

Die älteste Fernrohrkonstruktion ist das holländische oder Galileische Fernrohr (H. Lipperhey und G. Galilei). Das Objektiv dieses Fernrohrs ist wie bei allen Fernrohren eine Sammellinse, das

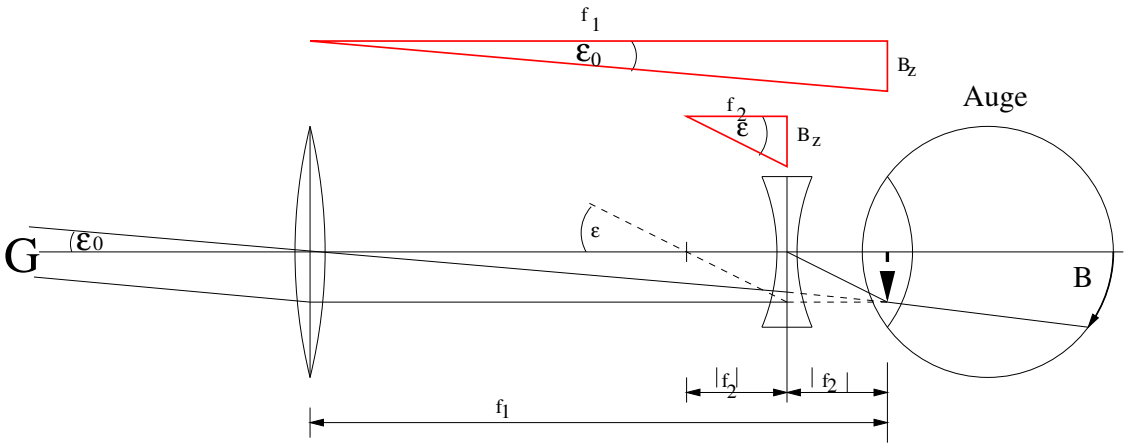


Abbildung A5.6: Strahlengang im Galileischen Fernrohr.

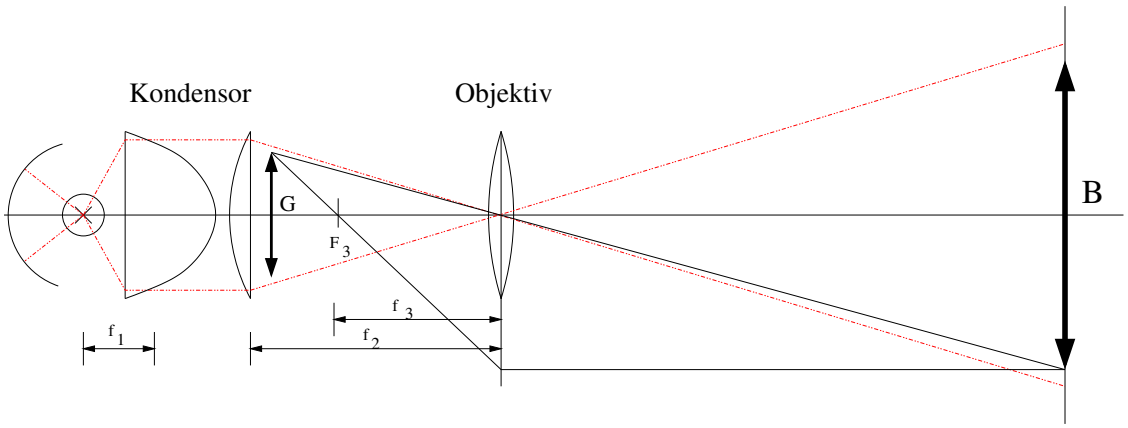


Abbildung A5.7: Strahlengang im Diaprojektor

Okular jedoch eine Zerstreuungslinse. Wie aus dem Strahlengang (Abb. A5.6) hervorgeht, sieht das Auge ein virtuelles, im ∞ liegendes, aufrechtes Bild des weit entfernten Gegenstandes. Für die Länge dieses Fernrohrs gilt $\ell = f_1 - |f_2|$. Anhand des Strahlengangs kann man ableiten, dass auch für die Vergrößerung des Galileischen Fernrohrs gilt:

$$v = \frac{f_1}{|f_2|}. \tag{A5.11}$$

A5.7 Projektionsapparat (Diaprojektor)

Im Projektor bildet das Projektionsobjektiv (Sammellinse mit Brennweite f_3, typisch bei Kleinbildprojektoren ist $f_3 = 85\,\text{mm}$) die Objektebene (Dia) scharf und stark vergrößert auf die Projektionsebene (Leinwand) ab. Der Beleuchtungsapparat besteht aus einer kleinflächigen Glühwendel und einem Kondensor, der bei nicht eingesetztem Dia für eine gleichförmige Helligkeit auf dem

Gesichtsfeld in der Projektionsebene sorgt. Dazu bildet der Kondensor die Lichtquelle auf die Projektionslinse ab (siehe Abb. A5.7). Das Bild des Glühfadens entsteht also in der Projektionslinse und nicht auf der Leinwand.

Um viel Licht einzusammeln, muss der Kondensor von der Glühwendel aus einen großen Raumwinkel (Ω = Fläche/Abstand^2) aufspannen. In der Optik redet man von kleinen Öffnungszahlen $f/\varnothing = 1/\sqrt{\Omega}$. Man verwendet deshalb entweder Fresnellinsen (Taglichtprojektoren) oder zweilinsige Systeme (Diaprojektoren), bestehend aus zwei Plankonvexlinsen, deren plane Flächen nach außen gerichtet sind (Abb. A5.7).

Frage: Warum diese Orientierung der Plankonvexlinsen des Kondensors?

Frage: Warum verwendet man nicht eine Bikonvexlinse?

Die Lichtquelle steht im Brennpunkt der erste Kondensorlinse (Brennweite f_1). Das Licht der Projektionslampe verlässt also die erste Kondensorlinse als Parallelbündel. Die zweite Kondensorlinse (Brennweite f_2) fokussiert das Bündel am Ort des Projektionsobjektivs, welches

- somit klein im Durchmesser gewählt werden kann, ohne Lichtverluste zu verursachen, und
- einen kleinen Öffnungsfehler hat.

Das Vergrößerungsverhältnis, oder auch der Abbildungsmaßstab γ, des Projektors ist gegeben durch

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \tag{A5.12}$$

Damit ein vergrößertes Bild entsteht, muss gelten: $2f_3 > g > f_3$. Zusammen mit den Bedingungen für die richtige Ausleuchtung muss weiterhin gelten: $2f_3 > f_2 > g > f_3$. Diese Bedingung bewirkt, dass ein Teil des Kondensors (die 2. Linse) auf die Brennweite des Projektionsobjektivs abgestimmt sein muss. Für große Abbildungsmaßstäbe $\gamma \gg 1$ gilt:

$$g \approx f_3 \quad \text{und} \quad b \approx \gamma \cdot f_3. \tag{A5.13}$$

Frage: Wie kann man den in Abb. A5.7 gezeigten Projektionsapparat durch Anbringen eines Hohlspiegels hinter der Projektionslampe verbessern? Worauf muss man achten?

A5.8 Autokollimation und Kollimator

A5.8.1 Autokollimation

Autokollimation ist ein Verfahren, mit dem man ein Keplersches (= astronomisches) Fernrohr so einstellen kann, dass ein Gegenstand in „unendlicher“ Ferne (z.B. ein Stern) durch das Fernrohr betrachtet scharf erscheint (ein Stern also punktförmig).

Ein Fernrohr besteht aus Objektiv und Okular. Bei einem typischen Autokollimations-Aufbau ist im Okularträger ein Dorn angebracht, der mit einer LED angeleuchtet werden kann. Zur Durchführung wird der Okularträger mittig auf die Schiene gestellt und das Okular in seiner Halterung so lange verschoben, bis der Dorn scharf erscheint (Dioptrienausgleich). Dann wird das Objektiv im

Abstand seiner Brennweite vom Dorn auf die optische Bank gestellt und unmittelbar dahinter ein Spiegel zur Autokollimation. Die Höhe des Objektivs ist so einzustellen, dass seine optische Achse mit der des Okulars zusammen fällt (zentrieren). Der leuchtende Gegenstand (Dorn) wird durch das Objektiv ins Unendliche abgebildet, d.h. die Strahlen von einem Punkt auf dem Dorn verlaufen jenseits des Objektivs parallel. Der Spiegel reflektiert die parallelen Strahlen in sich zurück auf das Objektiv und es entsteht ein reelles Bild des Dorns in der Brennebene des Objektivs. Durch Drehen des Spiegels kontrolliert man die seitliche Lage des Bildes und durch Höhenverstellung des Objektivs die vertikale Lage.

Das Bild des Dorns wird so verschoben, dass es in der oberen Hälfte des Gesichtsfeldes des Okular liegt und mit seiner Spitze die Spitze des Dorns fast berührt. Bei einer langen Brennweite des Objektivs ist der richtige Winkelbereich („das Gesichtsfeld“) sehr klein; es empfiehlt sich daher zu Anfang mit einem kurzbrennweitigem Objektiv zu üben.

Als einen empfindlichen Test der Justage kann man den Spiegel relativ zum Objekt verschieben; die Justage ist gut, wenn das Bild des Dorns am Bildort bleibt.

Abschließend ist zu prüfen, ob das Bild des Dorns tatsächlich oberhalb des Gegenstandes im Dorn liegt. Eine notwendige Bedingung ist, dass das Bild des Dorns scharf erscheint. Wegen des Effekts der „Tiefenschärfe“ ist dies aber nicht hinreichend. Um genauer zu prüfen, nutzt man die Parallaxe, die sich einstellt, wenn man das Auge seitlich über die Fläche des Okulars bewegt. Wenn Bild und Gegenstand Dorn exakt übereinander stehen, kann man keinen seitlichen Versatz zwischen Bild und Gegenstand entdecken, egal an welcher Stelle des Okulars das Auge durch die Linse blickt.

Steht der Gegenstand nicht in der Brennebene des Objektivs, dann entsteht entweder kein reelles Bild (Dorn zwischen Objektiv und Brennebene) oder ein Bild zwischen Dorn und Okular (Dorn weiter als Brennweite entfernt vom Objektiv. Wird dabei der Tiefenschärfebereich überschritten, sind Dorn und Bild nicht mehr gleichzeitig scharf sichtbar). Ist der Abstand des Dorns von der Brennweite zu groß, dann kann man gar nichts mehr erkennen.

Autokollimation wird auch für andere Aufgaben genutzt, beispielsweise zur Messung der Brennweite einer Linse, zur Prüfung der optischen Qualität von Oberflächen oder zur Justage optischer Instrumente. In der Geodäsie werden Autokollimationsfernrohre zur Ausrichtung von Gegenständen eingesetzt. Reflexionslichtschranken ohne nahen Blindbereich werden in Autokollimationsgeometrie (d.h. gleiche Optik für Sende- und Empfangsstrahl) aufgebaut.

A5.8.2 Optischer Kollimator

Mit einem Kollimator wird ein Strahl parallelen Lichts erzeugt. Er besteht aus einer Linse und einem Spalt, der in der Brennebene der Linse steht. Linse und Spalt können in ein Rohr eingebaut sein, das Streulicht abhält und Halterung für Spalt und Linse bietet. Das Rohr ist für die Funktion eines Kollimators nicht notwendig.

Zur Justage eines Kollimators werden Spalt und Linse auf dieselbe geometrisch-optische Achse gestellt. Der Abstand wird grob auf die Brennweite der Linse gebracht. Zur Feinjustage beleuchtet man den leicht geöffneten Spalt von der linsenabgewandten Seite und blickt mit einem auf unendlich justierten Fernrohr (Autokollimation) durch die Linse auf den Spalt. Dann wird der Abstand zwischen Spalt und Linse so lange variiert, bis der Spalt bei Betrachtung durch das Fernrohr scharf erscheint.

Damit der Kollimator wie vorgesehen funktioniert, muss er richtig beleuchtet werden. Dazu wird die Lichtquelle auf der optischen Achse des Kollimators so nahe am Spalt aufgestellt, dass die Linse voll ausgeleuchtet ist. Wenn man die vorhandene Lampe nicht direkt vor den Spalt stellen kann, bildet man die Lampe mit einer Linse auf den Spalt ab. Wenn die Linse nicht voll ausgeleuchtet ist, wird die Querschnittsfläche des Parallelstrahl kleiner als möglich. Wenn die Lampe neben der optischen Achse des Kollimators steht, gibt es bei einem Kollimator mit Rohr Reflexionen unter streifendem Einfall an der Innenseite des Rohrs, was einer zusätzlichen Fokussierung durch einen zylinderförmigen Hohlspiegel entspricht und so den parallelen Strahl zerstört. Vergleichbare Analoge Reflexe ergeben sich, wenn die Divergenz der Lichtquelle so groß ist, dass Reflexionen an der inneren Rohrwand auftreten.

Raumplan

Nr.	Bezeichung	Raum	Tel.
102/N02	Freie und erzwungene Schwingungen mit Dämpfung	AVZ	3715
104/106/N06	Trägheitsmoment, physisches Pendel	AVZ	3715
108/N08	Elastizitätskonstanten, Biegung und Knickung	0.010	4769
110	Spezifische Wärmekapazität	0.011	2794
114/N14	Statistik	0.002	9689
232/N32	Gleichströme, Spannungsquellen und Widerstände	U1.012	2789
234	Wechselstromwiderstände, RC-Glieder und Schwingkreis	U1.009	4774
236	Galvanometer	0.011	2794
238	Transformator	0.010	4769
240	Magnetisierung von Eisen	0.012	2795
242/N42	Kraftwirkung auf Ladungen (Fadenstrahlrohr)	U1.005	2791
		U1.006	4776
242	Kraftwirkung auf Ladungen (Millikan-Versuch)	U1.003	4777
		U1.004	4765
362/N62	Linsen und Linsensysteme	AVZ	3715
364	Fernrohr und Mikroskop	AVZ	3715
366/N66	Prismen-Spektralapparat	U1.003	4777
		U1.004	4765
368	Beugung und Interferenz	U1.007	4775
		U1.008	
370/N70	Polarisation von Licht	U1.007	4775
		U1.008	
372	Wärmestrahlung	U1.012	2789

Die Versuche stehen im Wolfgang-Paul-Hörsaal-Gebäude, Kreuzbergweg 28 (Raumnummern angegeben) oder im AVZ I, Endenicher Allee 11, im Erdgeschoss links.